15. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Obliczyć wartości iloczynów nieskończonych

$$\prod_{n=3}^{\infty}\left(1-\frac{4}{n^2}\right) \qquad \prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^3-1} \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right) \qquad \prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right),\ |x|<1 \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{1+\frac{1}{n}}$$

2. Zbadać zbieżność iloczynów

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right), \qquad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n}}{n}\right)$$

3. Zbadać zbieżność iloczynów

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \prod_{n=1}^{\infty}n\sin\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \prod_{n=1}^{\infty}n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

4. Pokazać, że ze zbieżności iloczynów

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n), \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n), \quad |a_n|<1$$

wynika zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

5. Pokazać, że dla $0<x_n<\pi/2$ każdy z iloczynów

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n, \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$.