2. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Dla $\varepsilon = 0,1$ znaleźć liczbę naturalną N taką, że

$$\left|\frac{n^2+n}{2n^2-2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon, \quad n > N.$$

Wykonać to samo polecenie dla $\varepsilon = 0,001$. Wykonać to polecenie dla dowolnej wartości $\varepsilon > 0$. `Uwaga:` Wartość liczby N nie musi być najmniejsza możliwa.

2. Dwa ciągi a_n i b_n są zbieżne do liczb a i b odpowiednio. Pokazać, że dla ustalonej dodatniej wartości ε istnieje liczba naturalna N spełniająca

$$|a_n - a| < \varepsilon, |b_n - b| < \varepsilon, \quad \text{dla } n > N.$$

3. Wyprowadzić z definicji zbieżności ciągu następujące równości

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+1}{2n^2+n+1} = \frac{1}{2}$$

4. Pokazać, że ciąg q^n dla $0 < q < 1$ jest zbieżny do zera. `Wskazówka:` (Wersja a) Pokazać, że ciąg ten jest malejący oraz ograniczony od dołu przez 0. Niech g oznacza granicę tego ciągu. Pokazać, że $qg = g$, zatem $g = 0$. (Wersja b) Z założenia $1/q = 1 + r$, dla pewnej liczby $r > 0$. Zatem $1/q^n = (1+r)^n \geqslant 1 + nr > nr$.

5. Pokazać, że jeśli ciąg a_n^2 jest zbieżny, to ciąg a_n nie musi być zbieżny. A jeśli ciąg a_n^2 jest zbieżny do zera ?

6. Uzasadnić, że ciąg a_n jest zbieżny do liczby a wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $|a_n - a|$ jest zbieżny do zera.

7. Pokazać, że jeśli nieujemny ciąg a_n jest zbieżny do liczby $a > 0$, to ciąg $\sqrt{a_n}$ jest zbieżny do liczby $\sqrt{a}$.

8. Obliczyć granice podanych ciągów, niekoniecznie z definicji.

$$\frac{n^2-3n+6}{1-2n^3} \qquad \frac{n^4+2(-1)^n n^2}{\sin n - 2n^4}$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \qquad \sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-3}$$

$$\sqrt[3]{n^2+3}-\sqrt[3]{n^2} \qquad \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} \qquad \frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}\ (1<a<b)$$

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2} \qquad \frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}$$

$$\frac{1}{n^3}[1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2] \qquad \frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} \qquad .$$

9. Ciąg a_n spełnia $a_1 = \sqrt{2}$ oraz $a_{n+1} = \sqrt{a_n+2}$. Udowodnić zbieżność ciągu a_n i obliczyć granicę. `Wskazówka:` (Wersja a) Pokazać przez indukcję, że $a_n < 2$ a następnie, że a_n jest ciągiem rosnącym. (Wersja b) Pokazać, że $|2 - a_{n+1}| \leqslant |2 - a_n|/2$.

10. Udowodnić następujące równości

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\ (a>1) \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

11. Obliczyć granicę ciągu $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}$.

$*$**12.** Znaleźć granice

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\Big),\ 0<x<\pi.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\Big(\pi\sqrt{n^2+n}\Big).$$

$*$**13.** Znaleźć liczbę naturalną k jeśli

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2008}}{n^k-(n-1)^k}=\frac{1}{2009}$$

Materiały pomocnicze do wykładu z analizy:

1. K. Kuratowski, Rachunek różniczkowy i całkowy.

2. G. M. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy i całkowy.

3. P. Głowacki, Notatki do wykładu z analizy (http://www.math.uni,wroc.pl/˜glowacki).