1. Zadania do wykładu
analiza 2B

1. Obliczyć sumy dolne i górne dla podanych całek:

(a) $\int_{-2}^{1} x^2\,dx$; $P = \{-2, -1, 0, 1\}$,

(b) $\int_{0}^{2} |x-1|\,dx$; $P = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$,

(c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$; $P = \{-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}\}$.

2. Obliczyć całki poprzez znalezienie podziałów, dla których sumy dolne i górne są blisko siebie.

$$\int_{-1}^{1} x\,dx, \qquad \int_{0}^{2} [x]\,dx, \qquad \int_{1}^{2} x^2\,dx, \qquad \int_{0}^{2} \{x\}\,dx.$$

3. Które z funkcji są całkowalne w sensie Riemanna na przedziale $[0,1]$?

$$f(x) = x + [2x]; \qquad f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases};$$

$$f(x) = \sin\frac{1}{x},\ f(0) = 1; \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases};$$

$$f(x) = \operatorname{sgn}\,\sin\frac{\pi}{x},\ f(0) = 0; \qquad f(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\}, f(0) = 0.$$

4. Nieujemna funkcja ciągła $f(x)$ spełnia warunek $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Pokazać, że $f(x) = 0$ dla $a \leqslant x \leqslant b$.

5. Pokazać, że jeśli $f(x)$ jest całkowalna w sensie Riemanna na odcinku $[0,1]$ oraz $\int_0^1 f(x)\,dx > 0$, to $f(x) > 0$ dla x z pewnego przedziału $[a,b] \subseteq [0,1]$.

6. Funkcja $f(x)$ jest monotoniczna na odcinku $[0,1]$. Udowodnić, że $f(x)$ jest całkowalna. Pokazać, że

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{c}{n}$$

dla pewnej stałej c.

7. Obliczyć całki przy pomocy granicy odpowiednich sum całkowych.

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx \qquad \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx \qquad \int_a^b \frac{dx}{x^2},\ 0 < a < b;$$

$$\int_0^1 a^x\,dx\ (a > 0) \qquad \int_0^x \cos t\,dt \qquad \textbf{Wskazówka: } t_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$$

8. Udowodnić oszacowania

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} < 2, \qquad \frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{x^2+1}\,dx < \frac{1}{2},$$

$$5 < \int_1^3 x^x\ dx < 31, \qquad \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx < \frac{3}{4}.$$

$*$**9.** Co jest większe $\int_0^\pi e^{\sin^2 x}\,dx$ czy $\frac{3\pi}{2}$?

$*$**10.** Obliczyć całkę Poissona

$$\int_0^\pi \log(1-2r\cos t+r^2)\,dt$$

dla (i) $|r|<1$; (ii) $|r|>1$. `Wskazówka:` Rozłożyć wielomian $r^{2n}-1$ na czynniki kwadratowe.

11. Obliczyć podane granice przy pomocy całek Riemanna odpowiednich funkcji.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right),\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right),\qquad {}^*\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+(1/2)}+\ldots+\frac{2^{n/n}}{n+(1/n)}\right).$$

12. Dowieść, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\log 2.$$

13. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}.$$

`Wskazówka:` Obliczyć granicę logarytmu wielkości występującej pod granicą.

$*$**14.** Niech $f(x)$ będzie funkcją różniczkowalną w sposób ciągły na przedziale $[a.b]$ i

$$\Delta_n=\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Znaleźć granicę $\lim_{n\to\infty} n\Delta_n$.

$*$**15.** Funkcja $f(x)$ jest całkowalna na przedziale $[0,2\pi]$. Pokazać, że

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx &= 0\\ \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\cos nx|\,dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\end{aligned}$$

Uogólnić na dowolny przedział $[a,b]$. `Wskazówka:` Rozbić całkę na $2n$ części punktami postaci $\frac{\pi k}{n}$.

$*$**16.** Dowieść, że jeśli $f(x)$ jest ciągłą i nieujemną funkcją na przedziale $[a,b]$, to

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_a^b f(x)^p\,dx\right)^{1/p}=\max\{f(x):\ a\leqslant x\leqslant b\}.$$

$*$**17.** Funkcja $f(x)$ jest całkowalna na przedziale $[a,b]$. Udowodnić, że

$$\lim_{h\to 0}\int_c^d |f(x+h)-f(x)|\,dx=0\quad \text{dla } a<c<d<b.$$

`Wskazówka:` Przy założeniu $h>0$ i $d\leqslant c+nh\leqslant b$ zauważyć, że

$$\int_c^d |f(x+h)-f(x)|\,dx\leqslant U(P,f)-L(P,f)$$

dla podziału odcinka $[c,c+nh]$ punktami $P=\{c,c+h,c+2h,\ldots,c+nh\}$.