10. Zadania do wykładu
analiza 2B

1. Pokazać, że jeśli funkcja $f(x)$ jest malejąca w przedziale $[1,\infty)$ oraz całka $\int_1^\infty x^\alpha f(x)\,dx$ jest zbieżna, to $x^{\alpha+1}f(x) \longrightarrow 0$, gdy $x\to\infty$.

2. Opierając się na twierdzeniu z wykładu wyprowadzić, że jeśli funkcja $f(x)$ ciągła na przedziale $[N,\infty)$ spełnia $f(x)\searrow 0$ dla $x\to\infty$, to zbieżność całki $\int_N^\infty f(x)\,dx$ jest równoważna zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)$.

3. Dla jakich wartości parametru $\alpha>0$ zbieżne są szeregi

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha},\qquad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^\alpha}\ ?$$

4. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^{2000}}{n^{1,0001}}.$$

5. Całkując wyraz po wyrazie rozwinięcia w szereg geometryczny dla funkcji $(1+x)^{-1}$ i $(1+x^2)^{-1}$ wyprowadzić rozwinięcia w szereg potęgowy dla funkcji $\ln(1+x)$ i dla $\operatorname{arc\,tg} x$.

∗6. Zbadać zbieżność całek

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4\cos^2 x},\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^\alpha\sin^2 x}.$$

7. Sprawdzić ciągłość i różniczkowalność względem parametru dla podanych całek. Przedstawić pochodną względem parametru w postaci całkowej.

$$\int_0^1 \sin(x^2+y^2)\,dy,\quad \int_{-1}^1 e^{ax^2}\,dx,$$
$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\ln\sin xy dx,\quad \int_0^\pi \frac{d\theta}{1+x\cos\theta+x^2}.$$

8. Obliczyć całkę

$$I(r)=\int_0^\pi \ln(1-2r\cos x+r^2)\,dx,\quad |r|<1.$$

poprzez przedstawienie $I'(r)$ w postaci całkowej, obliczenie otrzymanej całki za pomocą podstawienia $t=\operatorname{tg}(x/2)$. `Wskazówka:` Nie obliczać ostatniej całki, tylko zauważyć, że jej wartość wynosi 0.

9. Udowodnić wzór $\sum_{n=1}^\infty n^{-2}=\pi^2/6$ stosując następującą metodę Eulera. Najpierw obliczyć, że

$$\int_0^1 \arcsin x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Z kolei w całce zastąpić $\arcsin x$ przez rozwinięcie w szereg potęgowy (sprawdzić, że jest on zbieżny jednostajnie na przedziale $[0,1]$). Następnie scałkować otrzymany szereg pod całką wyraz po wyrazie.

10. W jakich przedziałach zmiennej x następujące całki są jednostajnie zbieżne ?

$$\int_0^\infty e^{-x^2y^2}dy,\quad \int_1^\infty \frac{\sin xy}{y^2}\,dy,\quad \int_1^\infty \frac{dy}{y^x}.$$

$*$**11.** Udowodnić wzór Froullaniego :

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \qquad (a, b > 0)$$

dla funkcji ciągłej $f(x)$, dla której całka $\int_1^\infty (f(x)/x)\, dx$ jest zbieżna. Następnie obliczyć całki

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx, \qquad \int_0^\infty (e^{-ax^2} - e^{-bx^2})\, \frac{dx}{x}.$$

$*$**12.** Obliczyć

$$F(a,b) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx\, dx, \quad \int_0^\infty x\, e^{-ax^2} \sin bx\, dx, \quad a > 0.$$

`Wskazówka:` Pokazać, że

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b) = -\frac{b}{2a}\, F(a,b).$$

Następnie skorzystać z faktu, że jeśli funkcja $y(x)$ spełnia równanie $y' = cxy$, to $y = y(0)\exp(cx^2/2)$.

13. Dla jakich wartości x funkcja

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y^x}\, dx$$

jest dobrze określona ? Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji $f(x)$.

14. Obliczyć granice

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left[1 + (1 + \frac{x}{n})^n\right]^{-1} dx, \quad \lim_{r\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin t} dt,$$

$$\lim_{a\to 0} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{xe^{-x/n}}{1 + x^2}\, dx.$$

$*$**15.** Obliczyć całkę $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x^2}{n})^{-n}\, dx$ zmieniając kolejność całkowania z przejściem do granicy $n \to \infty$.