11. Zadania do wykładu
analiza 2B

1. Obliczyć granice

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2} \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\neq 0}} \frac{\sin xy}{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)} xe^{-1/y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y^2)}{|x|^3+|y|^3} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$$

2. Sprawdzić, że granice nie istnieją.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y|^x \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

3. Zbadać ciągłość funkcji.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{|x|^3+|y|^3} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^{12}+y^4} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4. Wyznaczyć wnętrze podanych zbiorów.

(a) Koło o środku w (-1,0) i promieniu 2.

(b) $\{(x,y) \ : \ xy \geqslant 1\}$.

(c) $\{(x,y) \ : \ \max(|x|,|y|\} = 1\}$.

5. Wyznaczyć brzeg dla podanych zbiorów.

(a) Koło o środku w (-3,2) i promieniu 6.

(b) Górna półpłaszczyzna.

(c) Trójkąt o wierzchołkach w (-1,1), (1,1) oraz (0,-5).

(d) Wykres paraboli $y = 4x^2$.

(e) Płaszczyzna z wyłączeniem (0,0).

6. Niech A oznacza zbiór punktów (x,y), dla których $|y| < |x^3|$ oraz niech $f(x,y) = y/x$ dla (x,y) w A. Czy istnieje granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

7. Znaleźć wszystkie pochodne cząstkowe następujących funkcji:

$$\begin{array}{rlrl} f(x,y,z)= & x^y & f(x,y,z)= & x^y+z\\ f(x,y)= & \sin(x\sin y) & f(x,y,z)= & \sin(x\sin(y\sin z))\\ f(x,y,z)= & (x+y)^z & f(x,y,z)= & \log(x+y)\\ f(x,y,z)= & x^{y^z} & f(x,y,z)= & x^{y+z} \end{array}$$

8. Obliczyć $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ dla $f(x,y) = e^{\cos x}\log(\operatorname{arctg} xy + e^{\sin x^2 y})$.

9. Funkcja $f(x,y)$ jest ciągła na $\mathbb{R}^2$. Udowodnić, że zbiór $\{(x,y) \ : \ f(x,y) < c\}$ jest zbiorem otwartym dla dowolnej wartości c, oraz znaleźć brzeg tego zbioru.

10. Korzystając z tego zadania rozwiązać inaczej zadania 4 i 5.