12. Zadania do wykładu
analiza 2B

1. Funkcja $f(x,y)$ o ciągłych pochodnych cząstkowych spełnia warunki $f(x,0) = \sin x$ oraz $f(x,1) = \pi^{-1} + x^3$. Pokazać, że w pewnym punkcie pochodna cząstkowa $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ zeruje się. `Wskazówka:` Skorzystać z twierdzenia Lagrange'a.

2. Funkcja $g(x,y)$ ma dodatnie pochodne cząstkowe. Pokazać, że $g(x,y) < g(s,t)$ jeśli $x < s$ i $y < t$.

3. Funkcja $h(x,y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe i spełnia warunki $\dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{\partial h}{\partial y} > 0$ i $\dfrac{\partial h}{\partial x} - \dfrac{\partial h}{\partial y} > 0$. Pokazać, że $h(0,0) < h(\pi, e)$.

4. Funkcja $s(u,v)$ posiada ciągłe pochodne cząstkowe w każdym punkcie i spełnia $s(0,0) = s(3,4)$. Pokazać, że istnieje punkt płaszczyzny, w którym $3\dfrac{\partial s}{\partial u} + 4\dfrac{\partial s}{\partial v} = 0$.

5. Pokazać, że funkcja $f(x,y)$ mająca ograniczone pochodne cząstkowe w pewnym wypukłym obszarze płaszczyzny jest jednostajnie ciągła w tym obszarze, tzn. wartości funkcji leżą blisko siebie, jeśli argumenty funkcji leżą blisko siebie.
* Czy założenie o wypukłości obszaru jest istotne ?

6. Wyrazić pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie $(1,2,3)$ przy pomocy pochodnych cząstkowych funkcji g jeśli $f(x,y,z) = g(y,z,x)$. Użyć oznaczenia $D_i f$ na pochodną cząstkową względem i-tej współrzędnej, aby uniknąć pomieszania oznaczeń.

7. Niech $z = f(x-y)$. Pokazać, że $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

8. Dla $w = f(x-y, y-z, z-x)$ pokazać, że $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$.

9. Niech $z = f(x,y)$, $x = r\cos\theta$ i $y = r\sin\theta$. Pokazać, że $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\dfrac{\sin\theta}{r}$ oraz $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\dfrac{\cos\theta}{r}$.

10. Funkcja $f(x,y)$ jest jednorodna stopnia n jeśli dla dowolnej liczby rzeczywistej t spełniony jest warunek

$$f(tx, ty) = t^n f(x,y). \tag{1}$$

Pokazać, że dla takiej funkcji zachodzi wzór

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = n\,f(x,y).$$

`Wskazówka:` Zróżniczkować obie strony (1) względem t i podstawić $t = 1$.

11. Korzystając z poprzedniego zadania pokazać, że funkcja $f(x,y) = \operatorname{tg}\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ spełnia $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

12. Samochód zbliża się do przejazdu kolejowego przebiegającego pod kątem prostym do drogi, z prędkością 30 km/h. Pociąg zbliża się z prędkością 160 km/h. Znaleźć tempo zmiany odległości pomiędzy samochodem i pociągiem , gdy samochód znajduje się 1 km a pociąg 2 km od przejazdu.

13. Wielkość z jest funkcją zmiennych x i y i spełnia równanie

$$x^2z^2 - 2xyz + z^3y^2 = 3.$$

Obliczyć $\partial z/\partial x$ i $\partial z/\partial y$ stosując różniczkowanie niejawne.

14. Wykonać polecenie poprzedniego zadania dla

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{2}.$$

15. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0).

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$; $(x_0, y_0) = (1, 2)$.
(b) $f(x, y) = \sin xy$; $(x_0, y_0) = (-\pi/2, 1)$.

16. Czy istnieje płaszczyzna styczna do wykresu funkcji
$z = x^2 - y^2 + 2x + 2y$
(a) równoległa do płaszczyzny $z = x + y$;
(b) prostopadła do wektora $(1, 2, 3)^T$.

17. Znaleźć pochodną odwzorowania
$(x, y, z)^T \mapsto (x^2 + \sin zy, y^2 - \arctan xy, e^{x+y+z})^T$
w punkcie $(1, 0, 0)^T$.

18. Znaleźć pochodną odwzorowania
$(x, y, z)^T \mapsto (xyz^2, x^2 - z^2)^T$
w dowolnym punkcie $(x, y, z)^T$.

19. Pokazać, że pochodna w dowolnym punkcie odwzorowania liniowego związanego z macierzą A wymiaru m na n jest równa macierzy A.

20. Znaleźć pochodną w punkcie (a, b) odwzorowania z $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}$ zadanego wzorem
$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (x, y) \mapsto x \circ y \in \mathbb{R}$.