2. Zadania do wykładu
analiza 2B

1. Funkcja $g(x)$ różni się od funkcji całkowalnej $f(x)$ w skończenie wielu punktach przedziału $[a,b]$. Pokazać, że $g(x)$ też jest całkowalna i $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. `Wskazówka:` Rozpatrzeć przypadek, gdy $g(x)$ i $f(x)$ różnią się tylko w jednym punkcie. * Czy teza jest spełniona, gdy $g(x)$ i $f(x)$ różnią się w punktach $a + (b-a)/n$ dla $n = 1, 2, \ldots$?

2. Dla pewnego podziału P przedziału $[a,b]$ spełniony jest warunek $L(P,f) = U(P,f)$. Co można powiedzieć o funkcji $f(x)$? Czy $f(x)$ jest całkowalna ?

3. Funkcja $f(x)$ jest całkowalna osobno na przedziałach $[a,c]$ i $[c,b]$. Pokazać, że $f(x)$ jest całkowalna na przedziale $[a,b]$.

4. Zbadać całkowalność i w miarę możliwości obliczyć całki dla podanych funkcji w przedziale, w którym są określone.

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -x^2 & \text{dla } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } 0 \leqslant x < \pi, \\ \cos x & \text{dla } \pi \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ i } x \notin \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{dla } \quad 0 < x \leqslant 1 \text{ i } x \notin \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ i } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

5. Funkcja $f(x)$ jest całkowalna na przedziale $[a,b]$. Pokazać, że funkcja $f(x-c)$ jest całkowalna na przedziale $[a+c, b+c]$ oraz $\displaystyle\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

6. Korzystając z zasadniczego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego obliczyć pochodne całek.

$$\int_0^{x^2} \sin t\,dt, \qquad \int_{-\sin x}^{\cos x} \arcsin t\,dt, \qquad \int_0^x [t]\,dt, \qquad \int_{-x^2}^{x^4} \{t\}\,dt.$$