3. Zadania do wykładu
analiza 2B

1. Obliczyć

$$\frac{d}{du}\int_{-u}^{u^2}\sqrt{1+x^2}\,dx,\qquad \frac{d}{dt}\int_{\log t}^{e^t}\cos u^2\,du,\qquad \frac{d}{da}\int_a^b \sin\theta^4\,d\theta.$$

2. Znaleźć granice przy pomocy reguły de l'Hôpitala.

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t \cos x^2\,dx,\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\int_0^t (\operatorname{arctg} x)^2\,dx,$$
$$\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^t e^{2x^2}dx\right)^{-1}\left(\int_0^t e^{x^2}dx\right)^2,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(2xe^{-x^2}\right)\int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

3. Funkcja $f(x)$ jest dodatnia i ciągła dla $x\geqslant 0$. Pokazać, że funkcja $g(x)=\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^{-1}\int_0^x tf(t)\,dt$ jest rosnąca. `Wskazówka:` Obliczyć pochodną ilorazu i zapisać licznik jedną całką.

4. Obliczyć całki stosując wzór na podstawienie.

$$\int_0^1 2x(x^2+2)^{2000}\,dx,\qquad \int_0^1 t^9\sin t^{10}\,dt,$$
$$\int_2^3 x\sqrt{2x+1}\,dx\ (u=2x+1),\qquad \int_{\sqrt5}^{\sqrt{10}} x\sqrt{x^2-1}.$$

5. Obliczyć całki stosując wzór na całkowanie przez części.

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx,\ \int_{-1}^1 x^2e^x\,dx,\ \int_1^2 x\log x\,dx,\ \int_0^\pi e^x\sin x dx.$$

6. Obliczyć granice ciągów.

$$\frac{1}{n^3}\left[(n+1)\sqrt{n^2+2^2}+(n+2)\sqrt{n^2+4^2}+\ldots+2n\sqrt{5n^2}\right],$$
$$\frac{1}{n^2}\left[\sin\frac{1}{2n}+2\sin\frac{4}{2n}+\ldots+n\sin\frac{3n-2}{2n}\right].$$

7. Dowieść, że $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\frac14\pi^2$. `Wskazówka.` Podzielić przedział całkowania na dwie połowy i w drugiej całce podstawić $x=\pi-t$.

8. Udowodnić, że

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx=\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx.$$

9. Niech $f_1(x)$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna na przedziale $[0,a]$. Ciąg funkcyjny $\{f_n(x)\}$ jest zadany indukcyjnie wzorem $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)\,dt,\quad n=1,2,\ldots$. Pokazać, że funkcja $\varphi(x)=\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ jest dobrze określona i ciągła na $[0,a]$ z wyjątkiem punktów nieciągłości funkcji $f_1(x)$. Znaleźć prosty wzór całkowy dla funkcji $\varphi(x)$.

10. Udowodnić nierówność

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\leqslant\left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right).$$

`Wskazówka:` Dla liczby dodatniej λ mamy $2|f(x)g(x)|\leqslant\lambda f(x)^2+\lambda^{-1}g(x)^2$. Obliczyć całki obu stron nierówności i znaleźć minimum prawej strony względem parametru λ. Kiedy może zachodzić równość ?

∗11. Pokazać, że $\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

`Wskazówka:` $x^{-x} = e^{-x\log x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x\log x)^n}{n!}$.

12. Zbadać, czy całka po przedziale $[0,1]$ z granicy ciągu funkcyjnego jest równa granicy całek.

$$x(1-x^n) \qquad n^2x(1-x)^n \qquad x^n(1-x^n) \qquad \frac{nx}{1+nx}$$

13. Zbadać zagadnienie zbieżności całek ciągu i szeregu funkcyjnego dla jak największej liczby przykładów ciągów i szeregów funkcyjnych z listy 9 z pierwszego semestru.

14. Obliczyć sumę

$$\frac{1}{1}\binom{n}{0} - \frac{1}{3}\binom{n}{1} + \frac{1}{5}\binom{n}{2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{n}{n},$$

stosując do całki $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$ podstawienie $x=\cos\theta$.