4. Zadania do wykładu
analiza 2B

1. Zastosować wzór Taylora w postaci całkowej w punkcie $x = 0$ do funkcji $\sin x$, e^{2x}, $\cos x^2$ i $\log(1 - x^2)$. W każdym przypadku oszacować resztę i zbadać zbieżność szeregu Taylora.

2. Korzystając ze wzoru Stirlinga znaleźć promienie zbieżności szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{4n}{n} \pi^{2n} x^{5n+1},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} n^n x^{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} e^{n^2} x^{n!+n}.$$

3. Oszacować całki w oparciu o twierdzenia o wartości średniej.

$$42e^4 \leqslant \int_2^5 e^{x^2}(x^2+1)\,dx \leqslant 42e^{25},$$
$$-\log 6,75 + 1 \leqslant \int_1^2 \cos(\pi x)\,\log(1+x)\,dx \leqslant \log 6,75 - 1,$$
$$\left|\int_{2\pi}^{1000\pi} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{4\pi^2+1},$$
$$\left|\int_1^{2000} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{\pi^2+x^2}}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi^2+\pi^4}}.$$

∗4. Funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $[a, b]$. Pokazać, że dla wypukłej funkcji $\varphi(x)$ spełniona jest nierówność

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,dx.$$

5. Korzystając z zadania 4 wyprowadzić nierówności:

$$e^{1/3} \leqslant \int_0^1 e^{x^2}\,dx, \qquad \exp\left(\int_0^1 \log f(x)\,dx\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx,$$
$$\frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt{2}} \geqslant \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \sin x^3\,dx, \qquad \log 113569 \geqslant \int_2^4 \log(x^5+1)\,dx.$$

6. Znaleźć funkcję $F(x)$ spełniającą podane warunki.

(a) $F'(x) = x|x+1|$ i $F(-5) = 2$.

(b) $F''(x) = x^2 - x + \sin x$ i $F(0) = 2,\ F(\pi) = 3$.

(c) $F'''(x) = e^{2x} - 2x$ i $F(3) = 0,\ F'(\log 2) = 3,\ F''(0) = 0$.

7. Znaleźć wszystkie funkcje $F(x)$ spełniające podany warunek.

(a) $F'(x) = \dfrac{1}{x}$ dla $x \neq 0$.

(b) $F'(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$ dla $x \neq 0, 1$.

(c) $F'(x) = \log x(x-1)$ dla $x \notin [0, 1]$.

(d) $F''(x) = \dfrac{1}{x}$ dla $x \neq 0$.

$*$**8.** Pokazać, że $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \, dx > 0$.

$*$**9.** Dla funkcji $f(x)$ ciągłej na przedziale $[0, 1]$ wykazać równość $\int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx$.

10. Obliczyć całki nieoznaczone stosując całkowanie przez części.

$$\int x^2 \log x \, dx \qquad \int (\log x)^2 \, dx, \qquad \int x^2 e^{4x} \, dx,$$
$$\int t \cdot 2^t \, dt, \qquad \int u \sinh u \, du, \qquad \int \operatorname{arc\,tg} s \, ds,$$
$$\int \arccos(-7x) \, dx, \qquad \int \sin(\log x) \, dx, \qquad \int x^n \log x \, dx.$$

11. Obliczyć całki nieoznaczone stosując całkowanie przez podstawianie.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx, \qquad \int x\sqrt{x-1} \, dx, \qquad \int x^2\sqrt{x+3} \, dx,$$
$$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^{-3} dx, \qquad \int \frac{\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x}+1)^5} \, dx, \qquad \int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \, dx,$$
$$\int \frac{1}{e^x + 1} \, dx, \qquad \int \frac{x \, dx}{\sqrt{81 - x^4}}, \qquad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \, dx.$$