5. Zadania do wykładu
analiza 2B

1. Znaleźć wzory rekurencyjne dla całek

$$\int \cos^n x\,dx, \qquad \int x^n e^{-x}\,dx.$$

2. Obliczyć całki z funkcji wymiernych.

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx, \qquad \int \frac{x^2+4}{x(x-1)^2}\,dx, \qquad \int \frac{4x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx,$$
$$\int \frac{u^3}{(u+1)^2}\,du, \qquad \int \frac{x^3}{(x+1)^3}\,dx, \qquad \int \frac{1}{(1-x^2)^2}\,dx,$$
$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx, \qquad \int \frac{x^2-1}{x^3+3x-4}\,dx, \qquad \int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx.$$

3. Znaleźć błąd w rozumowaniu. Całkując przez części przy $u=\sin x,\ v=\sin^{-1} x$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx &= \sin x\frac{1}{\sin x} + \int \sin x\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx\\ &= 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx.\end{aligned}$$

Zatem $0=1$.

$*$**4.** Udowodnić, że jeśli funkcje ciągłe $f(x)$ i $g(x)$ są rosnące na przedziale $[0,1]$, to

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \geqslant \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 g(x)\,dx.$$

$*$**5.** Pokazać, że

$$\int_0^1 4x^2e^{2x^2}\,dx \geqslant (e-1)^2.$$

6. Pokazać, że $\int \sec x\,dx = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$, gdzie $\sec x = (\cos x)^{-1}$.

7. Obliczyć całki z funkcji trygonometrycznych.

$$\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx, \qquad \int \sin^2 x \cos^4 x\,dx,$$
$$\int \operatorname{tg}^3 x\sec^3 x\,dx, \quad (u=\sec x) \qquad \int \sin 2x\cos 3x\,dx,$$
$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx, \qquad \int \frac{1}{1+\sin x}\,dx.$$

8. Obliczyć całki z funkcji niewymiernych.

$$\int \sqrt{x-x^2}\,dx, \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{9x^2-1}}\,dx,$$
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}\,dx, \qquad \int \sqrt{z^2-4}\,dz,$$
$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx, \qquad \int \sqrt{x^2+6x+5}\,dx,$$
$$\int \frac{1}{(w^2+2w+5)^{3/2}}\,dw, \qquad \int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^7(x+1)^2}}\,dx.$$

∗9. Funkcja dodatnia $f(x)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły na przedziale $[0,+\infty)$ i ma własność, że przy zamianie zmiennych $\xi = \int_0^x f(t)\,dt$ przechodzi na funkcję $e^{-\xi}$. Znaleźć funkcję $f(x)$.

∗10. Funkcja ciągła $f(x)$ spełnia $\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$, dla $n \leqslant N$. Udowodnić, że $f(x)$ zeruje się przynajmniej $N+1$ razy w przedziale (a,b).

∗11. Dla ściśle dodatniej i ciągłej funkcji $f(x)$ określonej na przedziale $[0,1]$ obliczyć granicę

$$\lim_n \left(\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\,dx \right)^n .$$

12. Pokazać, że jeśli funkcja $f(x)$ ciągła na całej prostej spełnia

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt \equiv 0,$$

to $f(x)$ jest okresowa.

∗13. Pokazać, że równanie

$$\int_0^a e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{100}}{100!} \right) dx = 50$$

ma pierwiastek a w przedziale $(50,100)$.