7. Zadania do wykładu
analiza 2B

1. Funkcja $f(\theta)$ zależy w sposób ciągły od kąta θ, gdzie $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Niech R będzie obszarem złożonym z punktów na płaszczyźnie, których współrzędne biegunowe spełniają

$$0 \leqslant r \leqslant f(\theta) \quad \text{oraz } \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta.$$

Udowodnić, że pole obszaru R jest równe $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\,d\theta$. `Wskazówka:` Podzielić przedział $[\alpha,\beta]$ na n równych części i przybliżyć pole odpowiedniego obszaru przez pole wycinka kołowego.

2. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez wykresy równań we współrzędnych biegunowych.

$$\begin{array}{ll} r = 3\sin\theta; & r = 9|\sin 2\theta|,\ (\texttt{czterolistna róża}); \\ r = 2 + 2\cos\theta,\ (\texttt{kardioida}); & r^2 = 9\sin 2\theta,\ (\texttt{lemniskata}). \end{array}$$

3. Znaleźć pole wskazanego obszaru.

(a) Obszar wspólny dla okręgów $r = \cos\theta$ i $r = \sin\theta$.

(b) Obszar wewnątrz okręgu $r = \cos\theta$ i na zewnątrz kardioidy $r = 1 - \cos\theta$.

(c) Obszar na zewnątrz kardioidy $r = 1 + \cos\theta$ i wewnątrz kardioidy $r = 1 + \sin\theta$.

4. Pojemnik w kształcie odwróconego stożka o wysokości 4 m i promieniu 1 m jest wypełniony wodą. Obliczyć pracę potrzebną do wypompowania wody przez odpływ znajdujący się 1 m nad powierzchnią wody. Obliczyć pracę potrzebną do wypompowania połowy wody.

5. Wiadro z wodą jest podnoszone pionowo w tempie 0,5 metra na sekundę. Woda wycieka z pojemnika w tempie 1/2 litra na sekundę. Jeśli wiadro waży 1/2 kilograma i zawiera 10 litrów wody, jaka ilość pracy jest potrzebna do podniesienia wiadra do momentu aż będzie puste.

6. Basen pełen wody ma kształt półcylindra o wysokości 10 m i promieniu 2 m (jest położony tak, że widoczna powierzchnia wody jest prostokątem o wymiarach 10 m na 4 m). Obliczyć pracę potrzebną do wypompowania wody przez odpływ znajdujący się na brzegu basenu.

7. Stalowy płat w kształcie trójkąta równoramiennego o podstawie 2 m i wysokości 1 m leży na ziemi. Zakładamy, że masa każdego fragmentu płata jest równa polu. Ile pracy trzeba włożyć, aby unieść płat do pozycji pionowej, przy założeniu, że podstawa płata pozostaję cały czas na ziemi ?

8. W punkcie X płaszczyzny lub przestrzeni umieszczono masę m. Momentem punktu X względem osi l nazywamy iloczyn md, gdzie d oznacza odległość punktu X od l. Moment wyraża tendencję punktu X do obrotu wokół osi l. Moment układu punktów określa się jako sumę momentów pojedynczych punktów. Obszar R na płaszczyźnie leży pomiędzy wykresami funkcji $g(x)$ i $f(x)$ dla $a \leqslant x \leqslant b$. Zakładamy, że masa fragmentu obszaru jest równa powierzchni. Obliczyć momenty obszaru R względem osi x i względem osi y.

9. Obliczyć momenty obrotowe podanych figur na płaszczyźnie lub w przestrzeni, przy założeniu, że masa jest równa polu lub objętości (moment obrotowy punktu, w którym umieszczono masę m względem osi obrotu l jest równy iloczynowi m i kwadratu odległości tego punktu od osi l).

(a) elipsy $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ względem osi x i y;

(b) kuli względem jej osi symetrii;

(c) stożka względem jego osi symetrii.

10. Obliczyć środek masy:

(a) półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geqslant 0$;

(b) półkuli $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2,\ z \geqslant 0$;

(c) obszaru ograniczonego krzywą $r = a(1 + \cos\varphi)$.