8. Zadania do wykładu
analiza 2B

1. Wiadomo, że

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx.$$

Znaleźć przybliżoną wartość π stosując:(i) metodę trapezów dla $n=6$; (ii) metodę Simpsona dla $n=4$.

2. Znaleźć przybliżoną wartość całki

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\,dx$$

stosując metodę Simpsona dla $n=2$. Następnie obliczyć dokładną wartość całki i porównać wyniki.

3. Pokazać, że suma pojawiająca się w metodzie trapezów jest sumą całkową Riemanna, tzn. ma postać

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

dla pewnych liczb t_i z przedziału $[x_{i-1}, x_i]$.

4. Określmy ciąg wielomianów $p_n(x)$ wzorami $p_0(x)=0$ oraz

$$p_{n+1}(x) = \frac{1}{2}p_n(x)^2 + \frac{1-x^2}{2}.$$

Udowodnić, że dla $|x| \leqslant 1$ ciąg $p_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $1-|x|$. W związku z tym ciąg $1-p_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $|x|$ na przedziale $[-1,1]$. `Wskazówka:` Pokazać, że ciąg $p_n(x)$ jest rosnący i ograniczony z góry przez liczbę 1.

5. Pokazać, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f(x)$ na przedziale $[a,b]$ można znaleźć ciąg wielomianów $p_n(x)$ zbieżny jednostajnie do funkcji $f(x)$. `Wskazówka:` Rozważyć funkcję $g(t) = f(a+(b-a)t)$ na przedziale $[0,1]$.

6. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje wielomian T_n stopnia n taki, że $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$. Obliczyć T_2 i T_3.

7. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje wielomian U_n stopnia n taki, że $\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = U_n(\cos\theta)$. Obliczyć U_2 i U_3.

8. Cosinusowym wielomianem trygonometrycznym nazywamy funkcję postaci

$$a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + \ldots + a_n\cos n\theta.$$

Udowodnić, że dla dowolnej funkcji $G(\theta)$ ciągłej na przedziale $[0,\pi]$ istnieje ciąg cosinusowych wielomianów trygonometrycznych $P_n(\theta)$ jednostajnie zbieżny do $g(\theta)$. `Wskazówka:` Rozważyć funkcję $g(x) = G(\arccos x)$ na przedziale $[-1,1]$.

9. Funkcja ciągła $f(x)$ na przedziale $[0,1]$ spełnia

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0, \qquad n = 0,1,2,\ldots.$$

Pokazać, że $f(x)=0$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$.