3. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Sprawdzić, które z podanych warunków są równoważne zbieżności ciągu $\{a_n\}$ do liczby a. Symbol $\forall$ oznacza „dla każdego(-ej)", natomiast symbol $\exists$ oznacza „istnieje".

(a) $\forall(n \in \mathbb{N})\exists(N \in \mathbb{N})\forall(m \in \mathbb{N})\ \{m > N \Rightarrow |a_m - a| < \frac{1}{n}\}$

(b) $\exists(N \in \mathbb{N})\forall(\varepsilon > 0)\forall(n \in \mathbb{N})\ \{n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\}$

(c) $\exists(N \in \mathbb{N})\forall(n \in \mathbb{N})\ \{n > N \Rightarrow |a_n - a| < \frac{1}{N}\}$

(d) $\forall(N \in \mathbb{N})\forall(n \in \mathbb{N})\ \{n > N \Rightarrow |a_n - a| < \frac{1}{N}\}$

(e) $\forall(n \in \mathbb{N})\exists(N \in \mathbb{N})\forall(m \in \mathbb{N})\ \{m > 2^N \Rightarrow |a_m - a| < \frac{1}{2^n}\}$

2. Obliczyć granice ciągów, korzystając np. z twierdzenia o trzech ciągach.

$$\sqrt[n]{2^n + 5^n} \qquad \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}$$

$$\frac{n^3 - 2n^2 - 3}{n - 4n^2} \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n} \qquad n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

`Wskazówka:` Np. korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona można pokazać, że wyrazy przedostatniego ciągu są mniejsze niż $1 + (2/n)$. Albo pokazać, że ciąg $(1 + (1/k))^k$ jest ograniczony np. przez 3 i podstawić $k = n^2$.

3. Zbadać zbieżność ciągów korzystając np. z twierdzenia o ograniczonym ciągu monotonicznym lub z twierdzenia o trzech ciągach.

$$\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+9}{2n-1} \qquad \Big(1 - \frac{1}{2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{4}\Big) \ldots \Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big)$$

$$\Big(1 + \frac{1}{2}\Big)\Big(1 + \frac{1}{4}\Big) \ldots \Big(1 + \frac{1}{2^n}\Big) \qquad x_1 = 2,\ x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n}.$$

`Wskazówka:` Pierwszy ciąg jest malejący od pewnego miejsca lub jego wyrazy są mniejsze od np. $c(20/21)^n$. Zauważyć, że iloczyn wyrazów drugiego i trzeciego ciągu jest mniejszy niż 1. Następnie pokazać, że drugi ciąg nie jest zbieżny do zera, np. z korzystając z nierówności $1 - 2^{-n} \geqslant \xi_n/\xi_{n-1}$, dla $n \geqslant 3$ oraz $\xi_n = 1 + 2/(n-1)$.

4. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony a ciąg $\{b_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$. Pokazać, że ciąg $\{a_n + b_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$. Jeśli dodatkowo ciąg $\{a_n\}$ ma wyrazy dodatnie, to czy ciąg $\{a_n b_n\}$ musi być rozbieżny do $+\infty$?

5. Sprawdzić, które z podanych warunków są równoważne warunkowi Cauchy'ego dla ciągu $\{a_n\}$.

(a) $\forall(k \in \mathbb{N})\exists(N \in \mathbb{N})\forall(n, m \in \mathbb{N})\ \{n > m > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{1}{k}\}$

(b) $\forall(\varepsilon > 0)\exists N > 0 \forall(n, m \in \mathbb{N})\ \{n > N, m > N^2 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\}$

(c) $\forall(k \in \mathbb{N})\exists(N \in \mathbb{N})\forall(m, n \in \mathbb{N})\ \{m > N, n \leqslant N \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{1}{2^k}\}$

6. Sprawdzić, czy podane ciągi spełniają warunek Cauchy'ego.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \qquad \frac{\mathrm{arctg}\,1}{3} + \frac{\mathrm{arctg}\,2}{3^2} + \ldots + \frac{\mathrm{arctg\,n}}{3^{\mathrm{n}}}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2} \qquad x_1 = 0,\ x_{n+1} = \frac{3}{x_n + 2}.$$

`Wskazówki:` $1/n^2 \leqslant 1/(n-1) - 1/n$. Dla ostatniego ciągu pokazać, że $|x_{n+1} - x_{m+1}| \leqslant (3/4)|x_n - x_m|$.

7. Wiadomo, że ciąg b_n jest zbieżny. Czy ciąg $c_n = n(b_n - b_{n-1})$ może być rozbieżny do $+\infty$?

8. Pokazać, że jeśli ciąg x_n jest zbieżny, to także ciąg średnich arytmetycznych $\xi_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$ jest zbieżny i posiada tę samą granicę.

9. Ciąg x_n jest określony następująco : $0 < x_1 < 1$, $x_n = x_{n-1}/2$ dla parzystych n, oraz $x_n = (1 + x_{n-1})/2$ dla nieparzystych n. Jakie punkty skupienia ma ten ciąg ? `Wskazówka:` Obliczyć x_{2n} oraz x_{2n+1}.

10. Czy ciąg $\sin n$ jest zbieżny? * Czy zero jest punktem skupienia tego ciągu? ** Czy zero jest punktem skupienia ciągu $\sqrt{n} \sin n$?

∗**11.** Ciąg a_n ma własność $a_n < (a_{n-1} + a_{n+1})/2$ dla $n \geqslant 2$. Pokazać, że zachodzi jedna z trzech możliwości:

(a) a_n jest zbieżny

(b) $a_n \longrightarrow +\infty$

(c) $a_n \longrightarrow -\infty$

∗**12.** Ciąg x_n spełnia warunek $0 \leqslant x_{n+m} \leqslant x_n + x_m$. Pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \inf_n \frac{x_n}{n}.$$

∗**13.** Znaleźć granicę iloczynów

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{17}{16} \cdot \ldots \cdot \frac{2^{2^n} + 1}{2^{2^n}}.$$

∗**14.** Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin(2\pi e n!)$.

∗**15.** (zadanie dodatkowe do pierwszej listy) Niech x_n oznacza pierwszą od lewej cyfrę rozwinięcia dziesiętnego liczby 2^n. Czy liczba $0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ jest wymierna ?