

1. Zadania do wykładu  
analiza 3B

1. Wskazać punkty krytyczne podanych funkcji. Wyznaczyć, które z punktów krytycznych są lokalnymi maksimumi, lokalnymi minimummi lub punktami siodłowymi.

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 6x + 8y - 1$$

$$f(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2 - 6x + 10y - 2$$

$$k(x, y) = x^2 - xy - 2y^2 + 6x - 10y + 5$$

$$g(x, y) = x^2y - 2xy + 2y^2 - 15y$$

$$f(u, v) = u^3 + v^3 - 6uv$$

$$f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$$

$$f(x, y) = \sin x + \sin y$$

$$f(x, y) = (y - 2) \ln xy$$

2. Pokazać, że dla niezerowych stałych  $a$  i  $b$ , wszystkie punkty krytyczne funkcji  $f(x, y) = (ax + by)e^{-x^2 - y^2}$  leżą na prostej.
3. Znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji w podanym zbiorze.

$$f(x, y) = x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

$$f(x, y) = ye^{-x}, \quad 0 \leq x \leq \ln 2, \quad 0 \leq y \leq 3$$

$$f(x, y) = 2 \sin x + 3 \cos y, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}, \quad \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 2$$

4. Znaleźć trzy dodatnie liczby o sumie 48 i największym możliwym iloczynie.
5. Znaleźć trzy dodatnie liczby o iloczynie 48 i najmniejszej możliwej sumie.
6. Pokazać, że prostopadłościan o największej objętości wpisany w sferę ma kształt sześcianu.
7. Otwarte od góry pudełko w kształcie prostopadłościanu ma mieć objętość  $32 \text{ m}^3$ . Znaleźć wymiary pudełka o najmniejszej powierzchni.
8. Znaleźć punkt w przestrzeni o sumie współrzędnych równej 48, którego odległość od początku układu jest najmniejsza.
9. Pokazać, że jeśli funkcja  $f$  ma punkt krytyczny w  $(x_0, y_0)$  oraz  $\partial^2 f / \partial x^2 > 0$ ,  $\partial^2 f / \partial y^2 < 0$ , to  $(x_0, y_0)$  jest punktem siodłowym.
10. W trapezie równoramiennym suma mniejszej podstawy i dwu ramion wynosi  $3l$ . Pokazać, że trapez o największym polu ma podstawę równą  $l$  oraz kąt pomiędzy podstawą i ramieniem wynosi  $2\pi/3$ .
11. Strażnik musi przejść z pewnego miejsca w gęstym lesie do strażnicy, najpierw przez las, następnie przez teren bagieny aby dojść do drogi tak jak na rysunku. Prędkość strażnika w gęstym lesie wynosi  $3 \text{ km/h}$  w terenie bagnistym  $4 \text{ km/h}$  a na drodze  $5 \text{ km/h}$ . Znaleźć najszybszą trasę.

