10 . Zadania do wykładu
analiza 3B

1. Pokazać, że pole wektorowe $F = (P, Q) = \dfrac{(-y, x)}{x^2 + y^2}$ określone na płaszczyźnie (x, y) bez $x = y = 0$, spełnia $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, ale całka $\int_C F \cdot ds$ jest różna od zera, gdzie C jest okręgiem jednostkowym. Czy istnieje funkcja $V(x, y)$ taka, że $\nabla V = F$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$?

2. Pokazać, że pole wektorowe $F = (P, Q) = \dfrac{(x, y)}{x^2 + y^2}$ określone na płaszczyźnie (x, y) bez $x = y = 0$, spełnia $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, i całka $\int_C F \cdot ds = 0$ jest równa zero, gdzie C jest okręgiem jednostkowym. Czy istnieje funkcja $V(x, y)$ taka, że $\nabla V = F$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$?

3. Znaleźć funkcje $V(x, y)$ spełniające

$$\nabla V = (x^2, y^2) \qquad \nabla V = 4(x^2 - y^2)(x, -y)$$

$$\nabla V = \frac{(xy, x^2 + \sqrt{x^2 + y^2})}{y^2\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \nabla V = (2x\cos y - y^2 \sin x, 2y \cos x - x^2 \sin y)$$

$$\nabla V = \frac{(3y - x, y - 3x)}{(x + y)^3}$$

4. Dla jakiej liczby a można znaleźć funkcję $V(x, y)$ spełniającą

$$\nabla V = \frac{(x - y, x + y)}{(x^2 + y^2)^a}.$$

5. Dobrać stałe a i b tak, aby można było znaleźć funkcję $V(x, y)$ taką, że

$$\nabla V = \frac{(y^2 + 2xy + ax^2, -(x^2 + 2xy + by^2))}{(x^2 + y^2)^2}$$

6. Znaleźć funkcje $V(x, y, z)$ spełniające

$$\nabla V = \frac{(1, 1, 1)}{x + y + z} \qquad \nabla V = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\nabla V = \frac{(z, -3z, 3y - x + z^3)}{z^2} \qquad \nabla V = \left(e^{y/z}, z^{-1}(x + 1)e^{y/z} + ze^{yz}, -z^{-2}y(x + 1)e^{y/z} + ye^{yz} + e^{-z}\right)$$

7. Pokazać, że jeśli $v(x, y)$ jest funkcją harmoniczną sprzężoną do funkcji harmonicznej $u(x, y)$, to $u(x, y)$ jest funkcją sprzężoną do funkcji $v(x, y)$.

8. Sprawdzić, że funkcja $u = x + xy$ jest harmoniczna. Znaleźć sprzężoną funkcję harmoniczną.

9. Pokazać, że $\ln(x^2 + y^2)$ jest funkcją harmoniczną poza punktem $x = y = 0$. Znaleźć sprzężoną funkcję harmoniczną.

10. Pokazać, że funkcje

$$u_n(x, y) = r^n \cos n\theta \qquad v_n(x, y) = r^n \sin n\theta$$

są harmoniczne dla każdej liczby naturalnej n, gdzie r, θ są współrzędnymi biegunowymi punktu (x, y). Pokazać, że funkcje te są sprzężone do siebie. Czy teza jest prawdziwa dla całkowitych ujemnych liczb n ?

11. Funkcje $u(x, y)$ i $v(x, y)$ są harmoniczne i sprzężone do siebie. Pokazać, że jeśli funkcja $w(u, v)$ jest harmoniczna zmiennych u i v, to funkcja złożona $w(u(x, y), v(x, y))$ jest harmoniczna zmiennych x, y.