11. Zadania do wykładu
analiza 3B

1. Udowodnić, że jeśli wektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne to wyznacznik Grama $\det\langle v_i, v_j\rangle_{i,j=1}^n$ jest liczbą dodatnią. `Wskazówka:` Niech $\widetilde{v_k}$ oznacza rzut ortogonalny wektora v_k na podprzestrzeń rozpiętą przez wektory $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$. Pokazać, że

$$\det\langle v_i, v_j\rangle_{i,j=1}^n = \|v_1\|^2 \|v_2 - \widetilde{v_2}\|^2 \ldots \|v_n - \widetilde{v_n}\|^2$$

2. Pokazać, że wielomiany $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x$ oraz $P_2(x) = 1 - 3x^2$ tworzą układ ortogonalny w $C[-1,1]$. Znaleźć stałe a, b i c takie, że wielomian $P_3(x) = a + bx + cx^2 + x^3$ ortogonalny do poprzednich wielomianów.

3. Niech $\mathcal{P}_2$ oznacza przestrzeń wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej 2. W przestrzeni $\mathcal{P}_2$ określamy

$$\langle f, g\rangle \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}\,dx.$$

(a) Pokazać, że to jest iloczyn skalarny w $\mathcal{P}_2$.
(b) Pokazać, że zbiór $\{1,\ 1-x,\ 1-2x+\frac{1}{2}x^2\}$ jest układem ortonormalnym w $\mathcal{P}_2$.

4. W przestrzeni $C^1[0,1]$ funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły na przedziale $[0,1]$ określamy

$$\langle f, g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}\,dx.$$

(a) Pokazać, że to jest iloczyn skalarny.
(b) Znaleźć układ ortonormalny $\{h_1, h_2, h_3\}$ taki, że $\operatorname{span}\{h_1, h_2, h_3\} = \operatorname{span}\{1, x, x^2\}$.

5. Niech $f \in C[-\pi, \pi]$. Dla $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ określamy

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \alpha - \beta\cos x - \gamma\cos 10x|^2\,dx.$$

Pokazać, że funkcja F przyjmuje minimum w jedynym punkcie $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. Wyznaczyć ten punkt dla funkcji

$$f(x) = \cos^2 x \qquad f(x) = x^3 \qquad f(x) = \sin x$$
$$f(x) = 1 - 2\cos x \qquad f(x) = |x| \qquad f(x) = |\sin x|$$

6. W przestrzeni $C[0, 2\pi]$ określamy iloczyn skalarny

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

(a) Pokazać, że zbiór $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi}}\right\}$ jest układem ortonormalnym.
(b) Niech W oznacza podprzestrzeń liniową rozpiętą przez S i $f(x) = x$. Znaleźć funkcję g w W, położoną najbliżej f, tzn. dla której $\|f - g\|$ przyjmuje wartość najmniejszą.

7. W przestrzeni $C[-1,1]$ dane są funkcje

$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x + a,\ f_2(x) = x^2 + bx + c,\ f_3(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C.$$

Wiadomo, że układ $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ jest ortogonalny względem iloczynu skalarnego

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

(a) Obliczyć a, b, c oraz A, B, C.
(b) Znaleźć minimum funkcji

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \int_{-1}^{1} |x^4 - \alpha f_0(x) - \beta f_1(x) - \gamma f_2(x) - \delta f_3(x)|^2\,dx.$$