2. Zadania do wykładu
analiza 3B

1. Zbadać ekstrema funkcji

$$
\begin{aligned}
&x^2 + (y-1)^2 \\
&xy \ln(x^2+y^2) \\
&x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\
&\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z) \ (0 \leqslant x, y, z \leqslant \pi) \\
&e^{2x+2y}(8x^2 - 6xy + 3y^2) \\
&x_1 x_2^2 \ldots x_n^n (1 - x_1 - 2x_2 - \cdots - n x_n), \quad x_1, x_2, \ldots, x_n > 0 \\
&x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \ldots \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n}, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n > 0
\end{aligned}
$$

2. *(Zadanie Huygensa)* Pomiędzy dwie dodatnie liczby a i b wstawić n liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tak, aby wartość

$$u = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_n+b)}$$

była jak największa.

3. Znaleźć najmniejszą i największą wartość dla funkcji

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^2+2y^2}{(x+y)^2}, \quad x+y > 0 \\
&x^2 y(4-x-y) \text{ w trójkącie } x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 6.
\end{aligned}
$$

4. Znaleźć ekstrema funkcji $z(x,y)$ zadanej niejawnie równaniem

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10 &= 0 \\
(x^2+y^2+z^2)^2 - a^2(x^2+y^2-z^2) &= 0 \\
5(x^2+y^2+z^2) - 2(xy+yz+zx) &= 72
\end{aligned}
$$

5. Dla jakich x i y prawdziwa jest nierówność

$$xe^{x(y^2+1)} \geqslant -e^{-1} \ ?$$

6. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanych ograniczeniach.

(a) $f(x,y,z) = x - y + z,\ x^2+y^2+z^2 = 2.$

(b) $f(x,y) = x - y,\ x^2 - y^2 = 2.$

(c) $f(x,y) = x^{10} + y^{10},\ x + y = 2.$

(d) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

(e) $f(x,y,z) = x+y+z,\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1.$

(f) $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1^p + \ldots + x_n^p,\ x_1 + \ldots + x_n = a > 0.$

(g) $f(x,y,z) = x+y+z,\ x^2 - y^2 = 1,\ 2x + z = 1.$

(h) $f(x, y, w, z) = xw + yz,\ x^2 + y^2 = 1,\ w^2 + z^2 = 1.$

7. Na elipsie $(x^2/4) + (y^2/9) = 1$ znaleźć punkty najbliższy i najdalszy od prostej $3x + y - 9 = 0$.

8. Znaleźć największą i najmniejszą wartość podanych funkcji w kole jednostkowym, tzn. w zbiorze $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$.

(b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

9. Pudełko w kształcie prostopadłościanu otwarte od góry ma powierzchnię 16 m^2. Znaleźć wymiary, przy których objętość jest największa.

10. Promień światła przechodzi od punktu A do B przecinając linię między dwoma ośrodkami. Prędkości światła w tych ośrodkach wynoszą odpowiednio v_1 i v_2. Pokazać, że przejście światła zajmuje najmniej czasu, gdy spełnione jest prawo Snella:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

gdzie θ_1 i θ_2 oznaczają kąty, w odpowiednich ośrodkach, pomiędzy promieniem światła a prostą prostopadłą do linii rozdzielającej ośrodki.

11. Poczta w USA wymaga, aby wymiary paczki były takie, że suma długości, podwojonej szerokości i podwojonej wysokości nie przekraczała 108 cali. Jaka jest objętość największej objętościowo paczki jaką poczta może dostarczyć ?

12. Namiot, bez podłogi, ma kształt cylindra ze stożkowym daszkiem. Jakie muszą być wymiary namiotu o ustalonej objętości V, aby użyć jak najmniej materiału na jego budowę.

13. Udowodnić nierówność Höldera

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{1/q},$$

gdzie $p > 1,\ p^{-1} + q^{-1} = 1,\ a_i, x_i \geqslant 0$. `Wskazówka.` Znaleźć minimum prawej strony nierówności przy warunku $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A$.

14. Niech P będzie punktem powierzchni S w $\mathbb{R}$ określonej równaniem $f(x, y, z) = 1$, gdzie f jest klasy C^1. Załóżmy, że P jest punktem, w którym odległość od początku układu jest największa. Pokazać, że wektor łączący początek układu z punktem P jest prostopadły do S.

15. Załóżmy, że macierz kwadratowa wymiaru $n \times n$ nie jest symetryczna. Niech $f(x) = Ax \cdot x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j$, gdzie $x \in \mathbb{R}^n$. Obliczyć ∇f. Czy można wyprowadzić istnienie wektorów własnych i wartości własnych tak, jak w przykładzie rozwiązywanym na wykładzie ?