3. Zadania do wykładu
analiza 3B

1. Załóżmy, że równanie $F(x,y)=0$ opisuje krzywą na płaszczyźnie xy przechodzącą przez punkt (x_0,y_0). Niech $(\partial F/\partial y)(x_0,y_0)\neq 0$. Pokazać, że ta krzywa może być lokalnie opisana jako wykres funkcji $y=g(x)$. Pokazać, że prosta prostopadła do $\nabla F(x_0,y_0)$ jest prostą styczną do wykresu funkcji $y=g(x)$ w punkcie (x_0,y_0).

2. Pokazać, że z równania $4xy^2-2xz^5+3y^3z^2=12$ można obliczyć z jako funkcję od x i y w pobliżu $(0,1,2)$. Obliczyć $(\partial z/\partial x)$ i $(\partial z/\partial y)$ w punkcie $(0,1)$.

3. Pokazać, że z równania $x^3z^2-z^3yx=0$ można obliczyć z jako funkcję od x i y w pobliżu $(1,1,1)$, ale nie w pobliżu $(0,0,0)$. Obliczyć $(\partial z/\partial x)$ i $(\partial z/\partial y)$ w punkcie $(1,1)$.

4. Znaleźć ekstrema funkcji $z(x,y)$ zadanej niejawnie równaniem

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10 &= 0\\ (x^2+y^2+z^2)^2-a^2(x^2+y^2-z^2) &= 0\\ 5(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx) &= 72\end{aligned}$$

5. Z twierdzenia o funkcji uwikłanej obliczyć dy/dx dla
$\frac{x}{y}=10,\quad x^3-\sin y+y^4=4,\quad e^{x+y^2}+y^3=0.$

6. Zbadać rozwiązalność układu

$$\begin{aligned} 3x+2y+z^2+u+v^2 &= 0\\ 4x+3y+z+u^2+v+w+2 &= 0\\ x+z+w+u^2+2 &= 0\end{aligned}$$

dla u,v,w jako funkcji od x,y,z w pobliżu $x=y=z=0$, $u=v=0$, i $w=-2$.

7. Zbadać rozwiązalność układu

$$\begin{aligned} y+x+uv &= 0\\ uxy+v &= 0\end{aligned}$$

dla u,v względem x,y w pobliżu $x=y=u=v=0$. Sprawdzić również bezpośrednim rachunkiem.

8. Zbadać, czy z układu

$$\begin{aligned} u &= x+xyz\\ v &= y+xy\\ w &= z+2x+3z^2\end{aligned}$$

można obliczyć x,y,z względem u,v,w w pobliżu $(x,y,z)=(0,0,0)$.

9. Niech $f(x,y)=((x^2-y^2)/(x^2+y^2),xy/(x^2+y^2))$. Czy odwzorowanie z $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ w $\mathbb{R}^2$ jest lokalnie odwracalne w pobliżu $(x,y)=(0,1)$?

10. (a) Określmy funkcje $x,y:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ wzorami $x(r,\theta)=r\cos\theta$ i $y(r,\theta)=r\sin\theta$. Pokazać, że

$$\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|_{(r_0,\theta_0)}=r_0.$$

(b) Kiedy można utworzyć gładką funkcję odwrotną $r(x,y),\ \theta(x,y)$? Sprawdzić bezpośrednio i z użyciem twierdzenia o funkcji odwrotnej.

(c) Rozważmy przekształcenie dla współrzędnych sferycznych w $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \sin\varphi \cos\theta \\ y &= \varrho \sin\varphi \sin\theta \\ z &= \varrho \cos\varphi. \end{aligned}$$

Pokazać, że

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\varphi,\theta)} = \varrho^2 \sin\varphi.$$

(d) Kiedy możemy obliczyć (ϱ,φ,θ) w języku (x,y,z) ?

11. Czy można z układu

$$\begin{aligned} xy^2 + xzu + yv^2 &= 3 \\ u^3yz + 2xv - u^2v^2 &= 2 \end{aligned}$$

obliczyć $u(x,y,z)$ i $v(x,y,z)$ w pobliżu $(x,y,z) = (1,1,1)$, $(u,v) = (1,1)$? Obliczyć $\partial v/\partial y$ w $(x,y,z) = (1,1,1)$.

12. Znaleźć pierwsze i drugie pochodne cząstkowe funkcji $z(x,y)$ w punkcie $x = 1,\ y = -2,\ z = 1$ zadanej niejawnie równaniem $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$.

13. W jakim obszarze płaszczyzny układ równań $x = u + v,\ y = u^2 + v^2,\ z = u^3 + v^3$, gdzie parametry u i v przebiegają wszystkie wartości rzeczywiste, określa z jako funkcję zmiennych x i y ? Znaleźć pierwsze pochodne cząstkowe funkcji $z(x,y)$.

14. Zagadnienie rozkładu wielomianu $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ na czynniki liniowe jest w pewnym sensie zadaniem o funkcji odwrotnej. Współczynniki a_i są znanymi funkcjami zależnymi od n pierwiastków r_i. Chcemy obliczyć pierwiastki jako funkcje zależne od współczynników w pewnym obszarze. Dla $n = 3$, zastosować twierdzenie o funkcji odwrotnej do tego zagadnienia i zobaczyć efekt.