4. Zadania do wykładu
analiza 3B

1. Obliczyć całki iterowane.

$$\text{(a)} \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(xy^4+y^2)\,dy\,dx \quad \text{(b)} \int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{1}(y\cos x+2)\,dy\,dx$$
$$\text{(c)} \int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(xye^{x+y})\,dy\,dx \quad \text{(d)} \int_{-1}^{0}\int_{1}^{2}(-x\ln y)\,dy\,dx$$

2. Obliczyć całki z zadania 1 przez całkowanie najpierw względem x a potem względem y.

3. Za pomocą piły łańcuchowej wycięto fragment drzewa w kształcie klina w następujący sposób. Promień pnia drzewa wynosi r. Wykonano dwa cięcia aż do środka pnia: jedno cięcie poziome a drugie pod kątem θ. Obliczyć objętość klina korzystając z zasady Cavalieri'ego.

4. Obliczyć całki podwójne na prostokącie $R = [0,2]\times[-1,0]$.

$$\int_R (x^2y^2+x)\,dx\,dy, \qquad \int_R (-xe^x \sin\tfrac{1}{2}\pi y)\,dx\,dy.$$

5. Znaleźć objętość bryły ograniczonej wykresem funkcji $f(x,y) = 1+2x+3y$, prostokątem $R = [1,2]\times[0,1]$, i czterema pionowymi płaszczyznami wyznaczonymi przez R.

6. Powtórzyć poprzednie zadanie dla powierzchni $f(x,y) = x^4+y^2$ i prostokąta $[-1,1]\times[-3,-2]$.

7. Niech $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x \text{ jest wymierna} \\ 2y & \text{jeśli } x \text{ jest niewymierna.} \end{cases}$$

Pokazać, że całka iterowana $\int_0^1[\int_0^1 f(x,y)\,dy]\,dx$ istnieje, ale funkcja f nie jest całkowalna.

8. Załóżmy, że f jest ciągła na $R = [a,b]\times[c,d]$. Dla $a < x < b, c < y < d$ określamy

$$F(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(u,v)\,dv\,du.$$

Pokazać, że $\partial^2 F/\partial x\partial y = \partial^2 F/\partial y\partial x = f(x,y)$. Wskazać inny dowód, że dla funkcji $F(x,y)$ klasy C^2 pochodne mieszane rzędu 2 są równe.

9. Podzielmy kwadrat $[0,1]\times[0,1]$ na nieskończenie wiele prostokątów postaci $R_{m,n} = [1/(m+1), 1/m]\times[1/(n+1), 1/n]$. Określmy funkcję f w ten sposób, aby (znakowana) objętość pod wykresem funkcji f na prostokącie $R_{m,n}$ przybierała wartości zgodnie z poniższą tabelą.

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\
\cdots & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\
\cdots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\
\cdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Niech $f(0,0) = 0$. Suma w każdym wierszu wynosi 0, czyli sumując wiersze a potem kolumny otrzymujemy w wyniku 0. Kolumny sumują się do liczb

$$\cdots \quad -\tfrac{1}{32} \quad -\tfrac{1}{16} \quad -\tfrac{1}{8} \quad -\tfrac{1}{4} \quad -\tfrac{1}{2} \quad -1,$$

zatem sumowanie kolumn a potem wierszy daje w wyniku -2. Dlaczego twierdzenie Fubini'ego nie zachodzi dla tej funkcji ?

10. Niech f będzie ciągła i $f \geqslant 0$ na prostokącie R. Pokazać, że jeśli $\int_R f\,dx\,dy = 0$, to $f = 0$ na R.

11. Funkcja f jest ciągła na $[a, b]$ a g ciągła na $[c, d]$. Pokazać, że

$$\int_R [f(x)g(y)]\,dx\,dy = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\left[\int_c^d g(y)\,dy\right].$$

12. Obliczyć objętość bryły ograniczonej płaszczyznami xz, yz, xy, $x = 1$, $y = 1$ i powierzchnią $z = x^2 + y^4$.

13. Niech f, g będą całkowalne na prostokącie R. Niech $\mathcal{P}$ będzie podziałem prostokąta R a S pewnym prostokątem tego podziału. Pokazać, że

$$m_S(f) + m_S(g) \leqslant m_S(f+g), \quad M_S(f) + M_S(g) \geqslant M_S(f+g).$$

Wywnioskować, że

$$L(f, \mathcal{P}) + L(g, \mathcal{P}) \leqslant L(f+g, \mathcal{P}), \quad U(f, \mathcal{P}) + U(g, \mathcal{P}) \geqslant U(f+g, \mathcal{P}).$$

Korzystając z tych nierówności pokazać, że $f + g$ jest całkowalna oraz

$$\int_R (f+g)\,dx\,dy = \int_R f\,dx\,dy + \int_R g\,dx\,dy.$$

14. Niech f będzie całkowalna. Pokazać, że $|f|$ też jest całkowalna oraz $|\int_R f\,dx\,dy| \leqslant \int_R |f|\,dx\,dy$.

15. Pokazać, że jeśli funkcja $f(x, y)$ jest całkowalna na prostokącie R, a funkcja $\varphi(u)$ jest ciągła na $\mathbb{R}$, to funkcja $\varphi(f(x, y))$ jest całkowalna na R. Wywnioskować, że $f^2(x, y)$ jest całkowalna. Pokazać, że iloczyn $f(x, y)g(x, y)$ dwu funkcji całkowalnych na R jest funkcją całkowalną.