

6. Zadania do wykładu
analiza 3B

1. Zamienić kolejność całkowania, naszkicować obszary całkowania i obliczyć całki.

$$\int_0^1 \int_x^1 xy \, dy \, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \cos \theta \, dr \, d\theta,$$

$$\int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2 \, dx \, dy, \quad \int_a^b \int_a^y \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \, dx \, dy.$$

2. Obliczyć całki

$$\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2 \, dx \, dy, \quad \int_{-3}^1 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x^2 \, dx \, dy,$$

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2} \, dx \, dy, \quad \int_0^1 \int_{\arctan y}^{\pi/4} \sec^5 x \, dx \, dy.$$

3. Pokazać, że

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]} e^{\sin(x+y)} \, dx \, dy \leq e,$$

$$\frac{1}{2} \leq \int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{\sin x}{1+(xy)^4} \, dx \, dy \leq 1,$$

$$1 \leq \int_{[-1,1] \times [-1,2]} \frac{dx \, dy}{x^2 + y^2 + 1} \leq 6.$$

4. Pokazać, że

$$\frac{1}{6} \leq \int_D \frac{dx \, dy}{y-x+3} \leq \frac{1}{4},$$

gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 1)$ i $(1, 0)$.

5. Obliczyć $\int_D y^3(x^2 + y^2)^{-3/2} \, dx \, dy$, gdzie D jest obszarem wyznaczonym warunkami $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ oraz $x^2 + y^2 \leq 1$.
6. Pokazać, że

$$2 \int_a^b \int_x^b f(x)f(y) \, dy \, dx = \left(\int_a^b f(x) \, dx \right)^2.$$

Wskazówka: $\left(\int_a^b f(x) \, dx \right)^2 = \int_{[a,b] \times [a,b]} f(x)f(y) \, dx \, dy$.

7. Pokazać, że $\frac{d}{dx} \int_a^x \int_c^d f(x, y, z) \, dz \, dy = \int_c^d f(x, x, z) \, dz + \int_a^x \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \, dz \, dy$.
8. Odwzorowanie T jest określone na $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ wzorem $T(u, v) = (-u^2 + 4u, v)$. Znaleźć $D = T(D^*)$. Czy T jest różnowartościowe?
9. D^* jest równoległobokiem ograniczonym prostymi $y = 3x - 4$, $y = 3x$, $y = \frac{1}{2}x$ i $y = \frac{1}{2}(x + 4)$. Niech $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Znaleźć odwzorowanie T takie, że $T(D^*) = D$.
10. Odwzorowanie T jest określone na $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ wzorem $T(u, v) = (uv, u)$. Znaleźć obraz zbioru D^* . Czy T jest różnowartościowe? Jeśli nie, czy można usunąć pewien podzbiór z D^* tak, aby na pozostałej części T było różnowartościowe?
11. Niech D^* będzie równoległobokiem o wierzchołkach w $(-1, 3)$, $(0, 0)$, $(2, -1)$ i $(1, 2)$. Niech $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Znaleźć odwzorowanie T takie, że $T(D^*) = D$.
12. Niech D będzie kołem jednostkowym. Obliczyć $\int_D e^{x^2+y^2} \, dx \, dy$ przez zamianę zmiennych na współrzędne biegunowe.

13. Niech D będzie obszarem $0 \leq y \leq x$ i $0 \leq x \leq 1$. Obliczyć $\int_D (x+y) dx dy$ przez zamianę współrzędnych $x = u + v$, $y = u - v$. Sprawdzić wynik całkując bezpośrednio przy zastosowaniu całki iterowanej.
14. Określmy $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Niech D^* będzie zbiorem punktów (u, v) określonym warunkami $u^2 + v^2 \leq 1$, $u, v \geq 0$. Znaleźć $D = T(D^*)$. Obliczyć

$$\int_D dx dy \quad \text{oraz} \quad \int_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

15. Rozwiązać zadanie 10 z listy 5, przy użyciu współrzędnych biegunowych i porównać efektywność każdej z metod.
16. Obliczyć $\int_D (x+y)^2 e^{x-y} dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym przez proste $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$ i $x-y=1$.
17. D jest obszarem wewnątrz $x^2 + y^2 = 1$ ale na zewnątrz $x^2 + y^2 = 2y$, oraz $x, y \geq 0$. Naszkicować ten obszar. Niech $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 + y^2 - 2y$. Naszkicować obszar D^* na płaszczyźnie uv , otrzymany z D w wyniku zmiany współrzędnych. Obliczyć $\int_D x e^y dx dy$.