7. Zadania do wykładu
analiza 3B

1. Obliczyć całki krzywoliniowe $\int_\sigma f\,ds$, gdzie

(a) $f(x,y,z)=y$ i $\sigma(t)=(0,0,t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

(b) $f(x,y,z)=x+y+z$ i $\sigma(t)=(\sin t,\cos t,t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

(c) $f(x,y,z)=\cos z$ i $\sigma(t)=(\sin t,\cos t,t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

(d) $f(x,y,z)=x\cos z$ i $\sigma(t)=(t,t^2,0)$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

(e) $f(x,y,z)=\exp\sqrt{z}$ i $\sigma(t)=(1,2,t^2)$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

(f) $f(x,y,z)=yz$ i $\sigma(t)=(t,3t,2t)$, $1\leqslant t\leqslant 3$.

(g) $f(x,y,z)=\dfrac{x+y}{y+z}$ i $\sigma(t)=(t,\frac{2}{3}t^{3/2},t)$, $1\leqslant t\leqslant 2$.

(h) $f(x,y,z)=y^{-3}$ i $\sigma(t)=(\log t,t,2)$, $1\leqslant t\leqslant e$.

2. Pokazać, że całka krzywoliniowa funkcji $f(x,y)$ wzdłuż drogi σ zadanej we współrzędnych biegunowych poprzez $r=r(\theta)$, $\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$, jest równa

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

Obliczyć długość krzywej $r=1+\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

3. Niech $f(x,y)=2x-y$ i $\sigma(t)=(t^4,t^4)$, $-1\leqslant t\leqslant 1$. Obliczyć $\int_\sigma f\,ds$. Zinterpretować odpowiedź geometrycznie. Obliczyć długość krzywej σ. Obliczyć długość odcinka krzywej dla $-1\leqslant t\leqslant t_0$ gdzie $t_0\leqslant 1$.

4. Znaleźć masę przewodu, który powstaje z przecięcia sfery $x^2+y^2+z^2=1$ i płaszczyzny $x+y+z=0$, jeśli gęstość masy w punkcie (x,y,z) wynosi $\varrho(x,y,z)=x^2$ gramów na jednostkę długości przewodu.

5. Obliczyć $\int_\sigma f\,ds$, gdzie $f(x,y,z)=z$ i $\sigma(t)=(t\cos t,\sin t,t)$, $0\leqslant t\leqslant t_0$.

6. Dla krzywej $\sigma(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $a\leqslant t\leqslant b$ niech $s(t)$ oznacza długość odcinka krzywej odpowiadającego przedziałowi czasu $[a,t]$. Korzystając ze wzoru na długość krzywej pokazać, że

$$\frac{ds}{dt}=\|\sigma'(t)\|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}.$$

Załóżmy, że obiekt porusza się po krzywej tak, że w chwili t znajduje w punkcie $\sigma(t)$. Zatem prędkość poruszania się obiektu w chwili t jest równa długości wektora stycznego do krzywej w punkcie $\sigma(t)$.

7. Obliczyć całki krzywoliniowe.

(a) $\int_\sigma x\,dx+y\,dy+z\,dz$, $\sigma(t)=(t^2,3t,2t^3)$, $-1\leqslant t\leqslant 2$.

(b) $\int_\sigma x\,dy-y\,dx$, $\sigma(t)=(\cos t,\sin t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

(c) $\int_\sigma x\,dx+y\,dy$, $\sigma(t)=(\cos\pi t,\sin\pi t)$, $0\leqslant t\leqslant 2$.

(d) $\int_\sigma yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$, gdzie σ składa się z odcinków łączących punkt $(1,0,0)$ z $(0,1,0)$ i dalej z $(0,0,1)$.

(e) $\int_\sigma x^2\,dx-xy\,dy+dz$, gdzie σ jest fragmentem paraboli $z=x^2,\ y=0$ od $(-1,0,1)$ do $(1,0,1)$.

8. Pole sił F jest równe $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Obliczyć pracę wykonaną przy przesunięciu obiektu wzdłuż paraboli $y = x^2,\ z = 0$, od $x = -1$ do $x = 2$.

9. Niech σ będzie krzywą gładką. (a) Załóżmy, że wektor F jest prostopadły do wektora stycznego $\sigma'(t)$ w punkcie $\sigma(t)$. Pokazać, że $\int_\sigma F \cdot ds = 0$. (b) Załóżmy, że wektor F jest równoległy do wektora stycznego $\sigma'(t)$ w punkcie $\sigma(t)$, tzn. $F(\sigma(t)) = \lambda(t)\sigma'(t)$, gdzie $\lambda(t) > 0$. Pokazać, że $\int_\sigma F \cdot ds = \int_\sigma \|F\|\, ds$.

10. Niech $T(t)$ oznacza jednostkowy wektor styczny do krzywej σ. Ile wynosi $\int_\sigma T \cdot ds$?

11. Niech $F(x,y,z) = (z^3 + 2xy, x^2, 3xz^2)$. Pokazać, że całka krzywoliniowa $\int_\sigma F \cdot ds$ wokół obwodu kwadratu jednostkowego jest równa 0.

12. Ile wynosi całka krzywoliniowa zorientowana z gradientowego pola wektorowego wzdłuż krzywej zamkniętej ?

13. Obliczyć $\int_C 2xyz\, dx + x^2 z\, dy + x^2 y\, dz$, gdzie C jest krzywą zorientowaną łączącą $(1,1,1)$ z $(1,2,4)$.

14. Załóżmy, że $\nabla f(x,y,z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$ i $f(0,0,0) = 5$. Obliczyć $f(1,1,2)$.

***15.** Niech $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ będzie drogą taką, że $\sigma'(t) \neq 0$. Niech $f(x) = \int_a^x \|\sigma'(t)\|\, dt$. Obliczyć df/dx. Pokazać, że funkcja $f : [a,b] \to [0,L]$, gdzie L jest długością σ, ma różniczkowalną funkcję odwrotną $g : [0,L] \to [a,b]$ taką, że $f \circ g(s) = s$ i $g \circ f(x) = x$. Obliczyć dg/ds. Niech $\varrho(s) = \sigma \circ g(s)$ będzie reparametryzacją σ. Pokazać, że długość drogi od $\varrho(0)$ do $\varrho(s)$ wynosi s, prędkość przebiegu punktu $\varrho(s)$ po krzywej jest stała i wynosi 1. Wywnioskować, że każdą krzywą σ spełniającą warunek $\sigma'(t) \neq 0$ można sparametryzować przez długość łuku.

16. Rozważmy pole grawitacyjne (z $G = m = M = 1$) określone przez $F(x,y,z) = -(x,y,z)/r^3$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Pokazać, że praca potrzebna do przesunięcia obiektu z (x_1, y_1, z_1) do (x_2, y_2, z_2) zależy tylko od promieni $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ i $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.