8. Zadania do wykładu
analiza 3B

1. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej powierzchni w podanym punkcie (x_0, y_0, z_0) i zbadać gładkość w (a) i (b).

(a) $x = 2u$, $y = u^2 + v$, $z = v^2$, w $(0, 1, 1)$.

(b) $x = u^2 - v^2$, $y = u + v$, $z = u^2 + 4v$, w $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2)$.

(c) $x = u^2$, $y = u \sin e^v$, $z = \frac{1}{3} u \cos e^v$, w $(13, -2, 1)$.

2. Znaleźć wzór na wektor normalny do powierzchni.

(a) $x = 3 \sin\varphi \cos\psi$, $y = 2 \sin\varphi \sin\psi$, $z = \cos\varphi$, dla $\varphi \in [0, \pi]$ i $\psi \in [0, 2\pi]$.

(b) $x = \sin v$, $y = u$, $z = \cos v$ dla $u \in [-1, 3]$ i $v \in [0, 2\pi]$.

(c) $x = (2 - \cos v) \cos u$, $y = (2 - \cos v) \sin u$, $z = \sin v$, dla $u, v \in [-\pi, \pi]$, zbadać gładkość.

3. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni w podanym punkcie.

(a) $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u^2 + v^2$, w $u = v = 1$.

(b) $z = 3x^2 + 8xy$, $x = 1$, $y = 0$.

(c) $x^3 + 3xy + z^2 = 2$, $x = 1$, $y = \frac{1}{3}$, $z = 0$.

4. Rozważmy powierzchnię określoną przez $\Phi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta, \theta)$, $0 \leqslant r \leqslant 1$ i $0 \leqslant \theta \leqslant 4\pi$. Naszkicować i opisać tę powierzchnię. Znaleźć wzór na wektor normalny. Pokazać, że dla punktu (x_0, y_0, z_0) leżącego na powierzchni, odcinek poziomy długości 1 od osi z przez punkt (x_0, y_0, z_0) leży na powierzchni i na płaszczyźnie stycznej.

5. Obliczyć pole powierzchni helikoidy z zadania 4.

6. Obliczyć pole powierzchni torusa $x = (R + r \cos\varphi) \cos\psi$, $y = (R + r \cos\varphi) \cos\psi$, $z = r \sin\varphi$, gdzie $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$. Co by się stało, gdyby dopuścić $\varphi, \psi \in [0, 4\pi]$?

7. Niech $\Phi(u, v) = (u - v, u + v, u)$ i D będzie kołem jednostkowym w płaszczyźnie uv. Obliczyć pole powierzchni $\Phi(D)$.

8. Obliczyć pole powierzchni fragmentu sfery jednostkowej wyciętego przez stożek $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$.

9. Znaleźć parametryzację powierzchni $x^2 - y^2 = 1$, gdzie $x > 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ i $0 \leqslant z \leqslant 1$. Wyrazić pole powierzchni za pomocą całki.

10. Obliczyć pole powierzchni określonej przez $x + y + z = 1$, $x^2 + 2y^2 \leqslant 1$.

11. Znaleźć pole powierzchni wykresu funkcji $f(x, y) = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$, leżącego ponad kwadratem $[0, 1] \times [0, 1]$.

12. Obliczyć $\int_S xy \, dS$, gdzie S jest powierzchnią czworościanu o ścianach $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$ i $x = y$.

13. Niech $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ $(u, v) \in D$ będzie parametryzacją powierzchni S. Niech $E = \|T_u\|^2$, $F = T_u \cdot T_v$ i $G = \|T_v\|^2$. Pokazać, że $\|T_u \times T_v\| = \sqrt{EG - F^2}$ i $A(S) = \int_D \sqrt{EG - F^2}$. Jaką postać przybierze wzór, gdy wektory T_u i T_v będą zawsze prostopadłe ?

14. Obliczyć $\int_S z \, dS$, gdzie S jest górną półsferą o promieniu a.

15. Obliczyć $\int_S xyz \, dS$, gdzie S jest trójkątem o wierzchołkach $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ i $(0, 1, 1)$.

16. Obliczyć $\int_S z \, dS$, gdzie S jest powierzchnią $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

17. Obliczyć $\int_S z^2 \, dS$, gdzie S jest brzegiem sześcianu $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$.

18. Obliczyć masę sfery o promieniu R, gdzie gęstość masy w punkcie (x, y, z) jest równa odległości tego punktu od ustalonego punktu (x_0, y_0, z_0) tej sfery.

19. Metalowa powłoka S ma kształt górnej półsfery o promieniu R. Gęstość masy w (x, y, z) wynosi $\varrho(x, y, z) = x^2 + y^2$. Znaleźć całkowitą masę S.

20. Znaleźć środek masy części sfery o promieniu R leżącej w pierwszym oktancie, przy założeniu, że masa jest proporcjonalna do powierzchni.

21. Załóżmy, że temperatura w punkcie przestrzeni jest dana wzorem $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Obliczyć przepływ ciepła przez powierzchnię $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, przy $k = 1$.

22. Obliczyć przepływ ciepła przez sferę jednostkową, jeśli $T(x, y, z) = x$. Podać interpretację fizyczną wyniku.

23. Niech S będzie powierzchnią zamkniętą złożoną z górnej półsfery jednostkowej i jej podstawy $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = 0$. Niech $E(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ będzie polem elektrycznym w $\mathbb{R}^3$. Obliczyć strumień elektryczny przez S. `Wskazówka:` Rozłożyć S na dwie części S_1 i S_2 i obliczyć $\int_{S_1} E \cdot dS$ i $\int_{S_2} E \cdot dS$ oddzielnie.

24. Obliczyć $\int_S F \cdot dS$, gdzie S jest powierzchnią półkuli $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $z \geqslant 0$ i $F = (x + 3y^5, y + 10xz, z - xy)$.

25. Znaleźć przepływ pola $F(x, y, z) = (3xy^2, 3x^2y, z^3)$ na zewnątrz sfery jednostkowej.

26. Obliczyć całkę $\int_S F \cdot n\, dS$, gdzie $F = (1, 1, z(x^2 + y^2)^2)$, a S jest powierzchnią cylindra $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

27. Budynek restauracji położony jest na zboczu wzgórza w kształcie półkuli o promieniu $2R$ tak, że wnętrze znajduje się pomiędzy powierzchnią półkuli i cylindrem $x^2 + (y - R)^2 = R^2$, $0 \leqslant z \leqslant 2R$. Obliczyć powierzchnię pionowej ściany restauracji. W typowy letni dzień w otoczeniu restauracji temperatura wynosi $T = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2$. Intensywność przepływu ciepła $V = -k\nabla T$ (gdzie k jest stałą zależną od stopnia izolacji ścian) poprzez ściany restauracji (włącznie z sufitem i ścianą dotykającą wzgórza) powoduje napływ ciepła. Jaki jest całkowity przepływ ciepła ? (Wynik będzie zależny od R i k.)

28. (a) Silna jednostajna ulewa powoduje przepływ wody zgodnie z polem wektorowym $F(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Znaleźć całkowity przepływ przez powierzchnię stożka $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$.
(b) Mocny wiatr powoduje, że deszcz zaczyna padać pod kątem $45°$ i jest opisany przez pole $F(x, y, z) = -(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$. Jaki teraz jest przepływ wody przez stożek ?