9 . Zadania do wykładu
analiza 3B

1. Korzystając ze wzoru Greena obliczyć podane całki, przy założeniu, że krzywe są zorientowane dodatnio.

(a) $\int_C y\,dx - x\,dy$, gdzie C jest brzegiem kwadratu $[-1,1]\times[-1,1]$.

(b) $\int_C (y^2+x^3)\,dx + x^4\,dy$, gdzie C jest brzegiem kwadratu $[0,1]\times[0,1]$.

(c) $\int_C xy^2\,dy - x^2y\,dx$, gdzie C jest okręgiem $x^2+y^2=a^2$.

(d) $\int_C (e^x\sin y - my)\,dx - (e^x\cos y - m)\,dy$, gdzie C jest górnym półokręgiem $x^2+y^2=ax$, $y\geqslant 0$.

(e) $\int_C \cos\angle(v,n)\,ds$, gdzie C jest dowolną zamkniętą krzywą Jordana, n zewnętrznym wektorem normalnym do krzywej, a v dowolnym ustalonym wektorem.

(f) $\int_C (x,y)\cdot n\,ds$, gdzie C jak wyżej.

2. Znaleźć pole elipsy korzystając ze wzoru $A(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$.

3. Znaleźć pole obszaru ograniczonego przez jeden łuk cykloidy $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(\theta-\cos\theta)$, $a>0$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, i oś x.

4. Niech D będzie obszarem, w którym zachodzi twierdzenie Greena. Załóżmy, że funkcja $u(x,y)$ jest harmoniczna, tzn. $\triangle u = \partial^2u/\partial x^2 + \partial^2u/\partial y^2 = 0$ na D. Pokazać, że

$$\int_{\partial D} \nabla u\cdot n\,ds = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial y}\,dx - \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = 0.$$

`Wskazówka:` Jeśli $(x(t),y(t))$ jest parametryzacją ∂D, to wektor normalny ma postać $n=\alpha(-y'(t),x'(t))$, gdzie $\alpha=(x'(t)^2+y'(t)^2)^{-1/2}$.

∗5. Niech $u(x,y)$ będzie funkcją klasy C^2 w obszarze D. Niech B_r oznacza koło o środku w punkcie (x_0,y_0). Załóżmy, że B_r jest zawarte w D dla $0<r\leqslant r_0$. Określmy funkcję $I(r)=\dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_{\partial B_r} u\,ds$.

(a) Pokazać, że $\lim\limits_{r\to 0} I(r) = u(x_0,y_0)$.

(b) Udowodnić, że $I'(r)=\dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_{B_r} \triangle u\,dx\,dy$.

(c) Pokazać, że jeśli u jest harmoniczna, to $u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r} u\,ds$, tzn. wartość funkcji harmonicznej u w punkcie jest średnią wartości tej funkcji na dowolnym okręgu o środku w tym punkcie.

(d) Wywnioskować, że $u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{\pi r^2}\displaystyle\int_{B_r} u\,dx\,dy$.

(e) Załóżmy, że u ma w punkcie (x_0,y_0) lokalne maksimum (lub minimum). Udowodnić, że u musi być stała na pewnym kole o środku w (x_0,y_0).

(f) Załóżmy, że D jest obszarem łukowo spójnym i że funkcja u przyjmuje największą (lub najmniejszą) wartość w (x_0,y_0). Pokazać, że u jest stała na D.

6. Korzystając z twierdzenia Stokesa obliczyć całki $\int_S (\nabla\times F)\cdot dS$.

(a) S jest półsferą $x^2+y^2+3z^2=1,\ z\leqslant 0$, $F=(y,-x,zx^3y^2)$.

(b) S jest półsferą $x^2+y^2+z^2=16,\ z\geqslant 0$, $F=(x^2+y-4,3xy,2xz+z^2)$.

(c) S jest elipsoidą $x^2+y^2+2z^2=10$, $F=(\sin xy, e^x, -yz)$.

7. Korzystając z twierdzenia Stokesa obliczyć całki krzywoliniowe $\int_C F \cdot ds$.

(a) C jest okręgiem $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x + y + z = 0,\ F = (y, z, x)$.

(b) C jest okręgiem $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x + y + z = 0,\ F = (-y, z, x)$.

(c) C jest linią śrubową $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ z = \theta h/2\pi,\ F = (x^2 - yz, y^2 - xz, z - xy)$.

(d) C jest zamkniętą krzywą Jordana leżącą w płaszczyźnie $ax + by + cz - d = 0$, $F = (a', b', c') \times (x, y, z)$, gdzie $(a', b', c') \perp (a, b, c)$.

8. Pokazać, że z prawa Faraday'a wynika $\nabla \times E = -\partial H/\partial t$.

9. (a) Jeśli C jest zamkniętą krzywą będącą brzegiem powierzchni S i v jest ustalonym wektorem, to $\int_C v \cdot ds = 0$. (b) Pokazać, że jest to prawdą również, gdy C nie jest brzegiem powierzchni.

10. Niech S będzie powierzchnią zamkniętą. Pokazać, że jeśli F jest polem wektorowym klasy C^2, to $\int_S (\nabla \times F) \cdot dS = 0$.

11. Obliczyć całki powierzchniowe $\int_{\partial\Omega} F \cdot dS$ korzystając z twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego.

(a) Ω jest kulą jednostkową, $F = (x^3, y^3, z^3)$.

(b) Ω jest sześcianem $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$,
(i) $F = (x, y, z)$;
(ii) $F = (1, 1, 1)$;
(iii) $F = (x^2 + y^2 + z^2)$.

(c) $F = (y, z, xz)$,
(i) $\Omega := x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$;
(ii) $\Omega := x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1,\ x \geqslant 0$;
(iii) $\Omega := x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1,\ x \leqslant 0$.

(d) $F = (x - y, y - z, z - x)$, Ω jak w (c).

12. Niech S będzie powierzchnią obszaru Ω. Pokazać, że $\int_S r \cdot n\, dS = 3V(\Omega)$, gdzie $r = (x, y, z)$. Podać wyjaśnienie geometryczne. `Wskazówka:` Załóżmy, że $(0,0,0) \in \Omega$ i rozważmy skośny stożek o wierzchołku w $(0,0,0)$, i podstawie ΔS i wysokości $\|r\|$. Objętość stożka wynosi $\frac{1}{3}\Delta S(r \cdot n)$.

13. Przekształcić całki powierzchniowe na całki potrójne.

$$\int_S (yz, zx, xy) \cdot dS, \qquad \int_S \nabla u \cdot n\, dS.$$

∗14. Obliczyć całkę Gaussa $I = \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{r \cdot n}{\|r\|^3}\, dS$, gdzie $r = (x, y, z)$ jest bieżącym punktem powierzchni a Ω jest obszarem elementarnym w kierunku każdej osi $x,\ y,$ i z. Rozważyć przypadki $(0,0,0) \notin \Omega$ i $(0,0,0) \in \Omega$.