4. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Oprocentowanie depozytu w banku wynosi p procent w skali rocznej, $p > 0$. Bank nalicza odsetki w równych odstępach czasu n razy w roku. Niech $x = 0,01p$. Pokazać, że efektywne oprocentowanie w skali roku wynosi $100[(1 + x/n)^n - 1]$ procent i wywnioskować, że ciąg $(1 + x/n)^n$ jest rosnący. Pokazać, że ciąg $(1 - x/n)^n$, dla $n \geqslant x$, jest rosnący przez podanie odpowiedniej interpretacji. Dalej przyjąć $x = 1$ i poprzez wzięcie odwrotności wykazać, że ciąg $(1 + 1/n)^{n+1}$ jest malejący.

2. Udowodnić bezpośrednio zbieżność szeregów i obliczyć ich sumy

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

3. Zbadać zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

`Wskazówka:` $1/(n\sqrt{n}) \leqslant 2/\sqrt{n-1} - 2/\sqrt{n}$.

4. Wykazać, że jeśli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne oraz $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ też jest zbieżny.

5. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o wyrazach dodatnich są rozbieżne. Co można powiedzieć o zbieżności szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$?

6. Ciągi a_n i b_n są dodatnie, ściśle malejące oraz szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są rozbieżne. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ może być zbieżny ?

$*$7. Pokazać, że jeśli $a_n > 0$ oraz $a_n \nearrow \infty$, to

$$\sum \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \infty.$$

$*$8. Ciąg $a_n > 0$ jest malejący oraz

$$\sum a_n = \infty.$$

Pokazać, że

$$\sum \min\left(a_n, \frac{1}{n}\right) = \infty.$$

9. (a) Na prostym odcinku torów dwa pociągi, jadące każdy z prędkością 30 km na godzinę, zbliżają się do siebie. Gdy odległość pomiędzy pociągami wynosi 1 km, pszczoła zaczyna latać tam i z powrotem pomiędzy pociągami z prędkością 60 km na godzinę. Wyrazić odległość jaką przeleci pszczoła zanim pociągi się zderzą za pomocą nieskończonego szeregu i obliczyć sumę tego szeregu.

(b) Znaleźć elementarne rozwiązanie zagadnienia bez użycia szeregów. `Wskazówka:` Jak długo pszczoła będzie latała ? Krąży anegdota, że podobną zagadkę ktoś powiedział słynnemu matematykowi John'owi von Neumannowi (1903-1957), który podał odpowiedź błyskawicznie. Gdy rozmówca zasugerował, że von Neumann musiał rozwiązać to prostym sposobem, von Neumann odpowiedział, że w rzeczywistości otrzymał rozwiązanie poprzez zsumowanie szeregu.

∗10. Układamy cegły o jednakowej długości jedna na drugiej w ten sposób, aby konstrukcja nie zawaliła się, tzn. muszą być zachowane prawa fizyki. Pokazać, że można cegły ułożyć tak, aby brzeg górnej cegły był wysunięty w prawo od brzegu dolnej cegły tak daleko jak zechcemy.

11. Mrówka idzie z prędkością 30 cm na minutę wzdłuż jednorodnej gumowej taśmy. Na początku taśma ma długość 1 m i pod koniec każdej minuty jest rozciągana o dodatkowy metr. Mrówka zaczyna marsz w jednym końcu taśmy. Czy kiedykolwiek dotrze do drugiego końca ? Jeśli tak, to po jakim czasie ? `Wskazówka:` Niech a_n oznacza stosunek odległości mrówki od początku taśmy do aktualnej długości taśmy. Wyrazić a_{n+1} poprzez a_n.

12. Pokazać z kryterium porównawczego, że jeśli szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ są zbieżne to zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

13. Dla $a_n \geqslant 0$ pokazać, że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{a_n+1}$ są jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne.

14. Wykazać, że jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich i malejących jest zbieżny, to $na_n \to 0$. `Wskazówka:` $s_n - s_{[n/2]} \xrightarrow{n} 0$. ∗ Czy przy powyższych założeniach warunek $na_n \to 0$ wystarcza do zbieżności $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

15. Posługując się warunkiem Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} \qquad 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

16. Zbadać zbieżność szeregów posługując się w razie potrzeby kryterium Abela lub Dirichleta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3-2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\log_2(n+1)]}}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$$

Tam, gdzie to jest możliwe zbadać zbieżność bezwzględną. `Wskazówka:` W przedostatnim przykładzie zbadać $s_{2^{2n+1}-2} - s_{2^{2n}-2}$. W ostatnim skorzystać z trygonometrii.