5. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Zbadać zbieżność szeregów używając kryterium d'Alemberta, Cauchy'ego, twierdzenia o zagęszczaniu lub innych narzędzi.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2005^n}{(\log n)^n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{10}} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\log n)^2}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{2005}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \text{gdzie} \quad a_n = \begin{cases} n^{-1}, & \text{jeśli } n = m^2 \\ n^{-2}, & \text{jeśli } n \neq m^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots, \qquad \texttt{Wskazówka:}\ \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}.$$

2. Niech λ_n będą kolejnymi dodatnimi pierwiastkami równania $\operatorname{tg} x = x$. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}$.

3. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n)n^{-2}$, gdzie $\lambda(n)$ oznacza ilość cyfr w zapisie dziesiętnym liczby n.

4. Uogólnić twierdzenie Cauchy'ego o zagęszczaniu: jaka własność ciągu indeksów g_n gwarantuje, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(g_{n+1}-g_n)a_{g_n}$, przy czym zakładamy, że ciąg a_n maleje do 0. Czy można przyjąć $g_n = n^2$?

5. Wykazać, że $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!} = 1$ stosując mnożenie Cauchy'ego szeregów.

6. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n$, $|q| < 1$. stosując mnożenie Cauchy'ego szeregów.

7. Zbadać zbieżność szeregu $\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\ldots$ dla liczb dodatnich p i q.

8. Przestawić wyrazy zbieżnego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ tak, aby otrzymać szereg rozbieżny.

9. Dowieść, że jeśli permutacja $\sigma:\ \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ ma własność $|\sigma(n)-n| \leqslant M$ dla $n = 1, 2, \ldots$, to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ i sumy obu szeregów są równe.

10. Znaleźć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} x^{[n/2]}y^{[(n+1)/2]}$.

$*$**11.** Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest rozbieżny. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ jest rozbieżny ($s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$) natomiast $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ jest zbieżny. `Wskazówka:`

$$\begin{aligned} \frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} &\geqslant 1 - \frac{s_m}{s_n} \\ \frac{a_n}{s_n^2} &\leqslant \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}. \end{aligned}$$

Co można powiedzieć o zbieżności szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$?

$*$**12.** Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ jest rozbieżny natomiast $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ jest zbieżny, gdzie $r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m$. `Wskazówka:`

$$\begin{aligned} \frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{r_{n-1}} &\geqslant 1 - \frac{r_n}{r_m} \\ \frac{a_n}{\sqrt{r_n}} &\leqslant 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}). \end{aligned}$$