6. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Znaleźć granice funkcji korzystając z definicji Heine'go.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^3+1}\qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^4-x-14}\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x^4+1}-2}{\sqrt{x^3+3}-2}\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$$

$$\lim_{x\to y}\frac{x^n-y^n}{x-y}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x^4+x^3+1}-1}{x}\qquad {}^*\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$$

`Wskazówka:` Skorzystać z nierówności $\dfrac{1}{n+1}\leqslant \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\leqslant \dfrac{1}{n}$.

2. Który z poniższych warunków jest równoważny temu, że funkcja $f(x)$ określona na całej prostej ma granicę 1 w punkcie 0 ?

(a) Dla każdego ciągu $x_n \xrightarrow{n} 0$, $x_n\neq 0$, zachodzi $f(x_n^3)\xrightarrow{n} 1$.
(b) Dla każdego ciągu $x_n \xrightarrow{n} 0$, $x_n\neq 0$, zachodzi $f(x_n^2)\xrightarrow{n} 1$.
(c) Dla każdego ciągu $x_n \xrightarrow{n} 1$, $x_n\neq 1$, zachodzi $f(x_n-x_n^2)\xrightarrow{n} 1$.
(d) Dla każdej liczby $x\neq 0$ zachodzi $f(x/n)\xrightarrow{n} 1$.
(e) Dla każdej liczby $0<|q|<1$ zachodzi $f(q^n)\xrightarrow{n} 1$.

3. Dla $\varepsilon>0$ znaleźć $\delta>0$ aby dla $0<|x-a|<\delta$ spełniony był warunek $|f(x)-g|<\varepsilon$.

$$\begin{aligned}
&f(x)=x^2, && a=2, && g=4\\
&f(x)=\frac{1}{x+1} && a=-\frac{1}{2} && g=2\\
&f(x)=\sqrt[3]{x^2+7}, && a=1, && g=2\\
&f(x)=\frac{x^2+x-2}{3+4x-7x^2}, && a=1, && g=-0,3
\end{aligned}$$

4. Obliczyć granice korzystając z $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}\qquad \lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{arctg} h}{h}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x+2x^2}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x}\qquad \lim_{x\to \pi}\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$$

5. Udowodnić, że jeśli $\lim_{x\to a} f(x)=g$, to istnieje liczba $\delta>0$ taka, że zbiór wartości $f(x)$ dla $x\neq a$ oraz $|x-a|<\delta$ jest ograniczony.

6. Udowodnić, że jeśli $\lim_{x\to a} f(x)>0$, to istnieją liczby $\eta,\delta>0$ takie, że $f(x)>\eta$ dla $0<|x-a|<\delta$.

7. Podać definicje następujących granic i znaleźć odpowiednie przykłady (a^+ i a^- oznaczają granicę prawo i lewostronną)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty,\qquad \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$$

8. Udowodnić, że

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Wskazówka. Zauważyć, że jeśli $n \leqslant x < n+1$, to

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Wyprowadzić stąd, że

$$e^x = \lim_n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

9. Obliczyć granice

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x} \qquad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} \qquad \lim_{x\to 0} x^{-2006}e^{-1/x^2}.$$

10. Galileusz upuścił dwie żelazne kulki z górnego balkonu Krzywej Wieży w Pizie z wysokości około 45 m. Obliczając odpowiednią granicę znaleźć prędkość kulek po 2 sekundach spadku. Przyjąć $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ oraz $h(t) = 45 - 5t^2$, gdzie $h(t)$ jest wysokością kulki w chwili t, przed uderzeniem w ziemię. Jaka będzie prędkość kulek po 5 sekundach spadku [1]?

***11.** Pokazać, że jeśli funkcja $f(x)$ określona w $[a,\infty)$ jest ograniczona w każdym skończonym przedziale $[a,b]$, to

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)] \quad \text{i} \lim_{x\to\infty} f(x)^{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)} \qquad (f(x) \geqslant C > 0),$$

o ile granice po prawej stronie istnieją.

[1] Przyjmujemy, że uderzenie w ziemię jest sprężyste, tzn. energia kinetyczna jest zachowana.