8. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Pokazać, że każde z poniższych równań ma rozwiązanie w podanym przedziale.

$$x^3 - x - 5 = 0,\ [0,2] \qquad x = \cos x,\ [0,\pi/2] \qquad \sin x = 1 - x,\ [0,\pi/6]$$
$$e^x = 2 + x^2,\ [0,2] \qquad \sqrt{x} + 1 = x^2, [1,2]$$

2. Pokazać, że wielomian $p(x) = x^3 - 3x + 1$ posiada trzy pierwiastki rzeczywiste.

3. Funkcja $f(x)$ jest ciągła na odcinku $[0,\,1]$ i spełnia warunki $f(0) = 1$ i $f(1) = 0$. Pokazać, że $f(x) = x$ dla pewnego punktu $x,\ 0 < x < 1$.

4. Wyznaczyć rozwiązanie równania $x^3 = 3$ z dokładnością do $1/16$.

5. Obliczyć $\sqrt{0,7}$ z dokładnością do $1/16$.

6. Na odcinku drogi długości 100 km, kontrolowanym na końcach przez policję, obowiązuje ograniczenie prędkości 90 km/h. Samochód przejechał ten odcinek w czasie 54 minut, przy czym na początku i na końcu jechał z przepisową prędkością. Kierowca otrzymał mandat od policjanta, który stwierdził, że w pewnym momencie nastąpiło przekroczenie prędkości o dokładnie 10km/h. Czy policjant miał rację ? Ile przynajmniej razy nastąpiło to przekroczenie ?

7. Pokazać, że wielomian stopnia nieparzystego zeruje się przynajmniej w jednym punkcie.

8. Pokazać, że dla wielomianu $w(x)$ stopnia parzystego istnieje liczba M taka, że dla $c > M$ wielomian $w(x) - c$ lub $w(x) + c$ ma przynajmniej dwa miejsca zerowe.

9. Pokazać, że dla wielomianu $w(x)$ stopnia 3 istnieje liczba a taka, że wielomian $w(x) - ax$ ma 3 miejsca zerowe.

$*$**10.** f jest funkcją ciągłą na przedziale $[0,1]$ oraz $f(0) = f(1)$. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$, taki, że $f(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$. Czy stwierdzenie to pozostanie prawdziwe jeśli zamiast $\dfrac{1}{n}$ rozważymy dowolną liczbę $c,\ 0 < c < 1$?

$*$**11.** Udowodnić, że nie istnieje funkcja ciągła na $\mathbb{R}$ przyjmująca każdą swoją wartość dokładnie dwa razy. Zbadać dla jakich $n \in \mathbb{N}$ istnieje funkcja ciągła na $\mathbb{R}$ przyjmująca każdą wartość rzeczywistą n razy.

$*$**12.** Pokazać, że jeśli f jest ciągła na (a,b) oraz $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in (a,b)$, to istnieje $t \in (a,b)$ takie, że $f(t) = \dfrac{1}{n}\Big(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\Big)$.

13. Korzystając z twierdzenia o funkcji odwrotnej uzasadnić, że funkcje $\arcsin x$, $\arccos x$ oraz $\operatorname{arctg} x$ są ciągłe na przedziałach $[-1,1]$, $[-1,1]$ i $(-\infty,\infty)$, odpowiednio.

14. Obliczyć granice

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{(\arccos x)^2}{1-x} \qquad \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi/2 - \arcsin x}}$$

$*$**15.** f jest funkcją ciągłą i ograniczoną na przedziale $(a,\,+\infty)$. Pokazać, że dla dowolnej liczby T, istnieje ciąg $x_n \to \infty$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(f(x_n + T) - f(x_n)\Big) = 0$.