

9. Zadania do wykładu  
Analiza IB, R. Szwarz

1. Wykazać, że ciąg funkcji  $f_n(x)$  jest jednostajnie zbieżny do funkcji  $f(x)$  dla  $x \in A$  wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg  $a_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$  jest zbieżny do zera.
2. Ciąg funkcji  $f_n(x)$  na przedziale  $[0, 1]$  jest zbieżny jednostajnie do zera. Niech  $x_n$  będzie dowolnym ciągiem liczb z przedziału  $[0, 1]$ . Udowodnić, że  $\lim_n f_n(x_n) = 0$ .
3. Ciąg funkcji  $f_n(x)$  na przedziale  $[0, 1]$  jest zbieżny punktowo do zera. Załóżmy, że dla pewnej dodatniej liczby  $\delta$  istnieje ciąg  $x_n \in [0, 1]$  spełniający  $f_n(x_n) \geq \delta$ . Czy ciąg  $f_n$  jest zbieżny jednostajnie do zera?
4. Czy ciąg  $f_n(x) = n(x^n - x^{n+1})$  jest zbieżny jednostajnie do zera na przedziale  $[0, 1]$ ? **Wskazówka:**  $x_n = 1 - (1/n)$ .
5. Zbadać zbieżność jednostajną ciągów funkcji na przedziale  $[0, 1]$ .

$$\begin{array}{cccc} f_n(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{nx}} & f_n(x) = (1 - x)^n & f_n(x) = (1 - 0,5x)^n & f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} \\ f_n(x) = x^n - x^{2n} & f_n(x) = x(1 - x)^n & f_n(x) = nx(1 - x)^n & f_n(x) = \sqrt[n]{1 - x^n} \end{array}$$

6. Zbadać zbieżność jednostajną ciągów funkcji na podanych zbiorach.

$$\begin{array}{lll} f_n(x) = \frac{1}{x+n}, x > 0; & f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, x \in \mathbb{R}; & f_n(x) = e^{-nx^2}, -1 \leq x \leq 1; \\ f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}, 0 \leq x \leq 2; & f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, x \in \mathbb{R}; & \end{array}$$

**Wskazówka:** W obu poprzednich zadaniach obliczyć granicę punktową  $f$ . Następnie w zależności od sytuacji: (a) oszacować  $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ , (b) znaleźć punkty  $x_n$ , że  $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \delta > 0$ , (c) skorzystać z twierdzenia Dini'ego, (d) skorzystać z nieciągłości funkcji  $f(x)$ .

7. Ciąg funkcji ciągłych  $f_n(x)$  jest zbieżny jednostajnie do funkcji  $f$  na przedziale  $[a, b]$ . Pokazać, że dla pewnej stałej liczby  $M > 0$  zachodzi

$$|f_n(x)| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \leq x \leq b.$$

8. Funkcja ciągła  $f(x)$  zmienia znak w przedziale  $[a, b]$  przynajmniej raz. Pokazać, że jeśli ciąg funkcji ciągłych  $f_n$  jest zbieżny jednostajnie do funkcji  $f$  na tym przedziale, to dla dostatecznie dużych  $n$  każda z funkcji  $f_n$  zeruje się w  $[a, b]$ .
9. Zbadać zbieżność jednostajną szeregów funkcyjnych korzystając z twierdzenia Weierstrassa o majoryzacji.

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x}, x \geq 0; & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^4+x^4}, x \in \mathbb{R}; & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}, x \in \mathbb{R} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^2+n \log^2 n}, |x| \leq 1; & \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, x \geq 0; & \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{2x}{x^2+n^3}, x \in \mathbb{R} \end{array}$$

- \*10. Dowieść, że funkcja  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}$  jest ciągła we wszystkich punktach, w których jest określona (tzn.  $x \neq \pm n$ ).

- \*11. Sprawdzić, że funkcja  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x} e^{-n^2x}$  jest ciągła w przedziale  $x > 0$  i nieciągła w  $x = 0$ .

12. Znaleźć ciągi funkcji  $\{f_n(x)\}$  i  $\{g_n(x)\}$ , które są zbieżne jednostajnie na prostej, a ciąg  $\{f_n(x)g_n(x)\}$  nie jest jednostajnie zbieżny.

13. Ciąg liczb dodatnich  $a_n$  jest malejący i zbieżny do zera. Ciąg funkcji  $b_n(x)$  spełnia

$$|s_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^n b_k(x) \right| \leq M, \quad x \in A.$$

Udowodnić, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n(x)$  jest jednostajnie zbieżny. **Wskazówka:** Przeanalizować dowód twierdzenia Dirichleta.

14. Pokazać, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

są jednostajnie zbieżne dla  $x \in [\varepsilon, \pi]$  dla dowolnej liczby  $0 < \varepsilon < \pi$ .

15. Czy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}}$  jest jednostajnie zbieżny dla  $x \in \mathbb{R}$  ?

**Wskazówka:** Pokazać, że  $|s_n(x) - s(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

16. Pokazać, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  nie jest bezwzględnie zbieżny dla żadnej liczby  $x \neq k\pi$ . **Wskazówka:**  $2|\sin nx| \geq 2\sin^2 nx = 1 - \cos 2nx$ .

17. Obliczyć promienie zbieżności szeregów potęgowych

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} x^n & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} x^n & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} x^n & \sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^{n^2} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x^n \\ \sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 5^n) x^{2n} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n!} & \sum_{n=1}^{\infty} \sin(2^{-n}) x^{4n} & \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + 3^{-n}) x^{n^2} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^{[n! \sqrt{2}]} \end{array}$$

Zbadać zachowanie się szeregów na brzegu przedziału zbieżności.