Analiza funkcjonalna II

Ryszard Szwarc

Wykład prowadzony w semestrze letnim 2008

Opracowany na podstawie notatek Wiktora Malinowskiego

Wrocław 2010

Spis treści

1 Operatory ograniczone na przestrzeni Banacha

Niech $T : X \longrightarrow X$ będzie ciągłym operatorem liniowym na przestrzeni Banacha X. Przypominamy, że normę operatora T określamy wzorem

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \,:\, \|x\| \leqslant 1\}.$$

Symbolem $B(X) := B(X, X)$ oznaczamy przestrzeń Banacha wszystkich ciągłych operatorów liniowych z X w X.

Przykład 1.1. Rozważmy odwzorowanie liniowe $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Chcemy zbadać dla jakich zespolonych liczb λ operator (tzn. macierz) $\lambda I - T$ jest odwracalny. Jak wiadomo z kursu algebry liniowej warunkiem równoważnym jest $\det(\lambda I - T) \neq 0$. Liczby λ, dla których ostatni wyznacznik zeruje się nazywamy wartościami własnymi. Wiadomo, że jeśli $\det(\lambda I - T) = 0$, to istnieje niezerowy wektor $v \in \mathbb{C}^n$ taki, że $Tv = \lambda v$. Tzn. macierz $\lambda I - T$ nie jest różnowartościowa. Innym równoważnym warunkiem jest, że $\mathrm{Im}\,(\mathrm{\lambda I - T}) \subsetneq \mathrm{\mathbb{C}^n}$.

Definicja 1.2. *Zbiorem* ***rezolwenty*** $\rho(T)$ *nazywamy zbiór tych liczb zespolonych* λ*, dla których operator* $\lambda I - T$ *jest odwracalny. Dopełnienie* $\mathbb{C} \setminus \rho(T)$ *nazywamy* ***spektrum*** *operatora* T *i oznaczamy symbolem* $\sigma(T)$*.*

Definicja 1.3. *Spektrum punktowym $\sigma_p(T)$ nazywamy zbiór wartości własnych operatora T, tzn. zbiór liczb zespolonych λ takich, że $\lambda I - T$ nie jest operatorem różnowartościowym. Wtedy istnieje niezerowy element x w X taki, że $Tx = \lambda x$.*

Definicja 1.4. *Spektrum resztowym $\sigma_r(T)$ nazywamy zbiór liczb zespolonych λ, dla których obraz $\mathrm{Im}\,(\lambda I - T)$ nie jest gęstą podprzestrzenią w X.*

Przykład 1.5. Rozważmy przestrzeń

$$X = \ell^2 = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}.$$

Dla $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ określmy operator S wzorem

$$(Sx)_n = \begin{cases} x_{n-1} & n \geqslant 1 \\ 0 & n = 0. \end{cases}$$

Tzn.

$$S(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots).$$

Mamy $\|Sx\|_2 = \|x\|_2$, zatem $\|S\| = 1$. To oznacza, że operator S jest izometrią.

Sprawdzamy różnowartościowość operatora $\lambda I - S$. W tym celu rozwiązujemy równanie $(\lambda I - S)x = 0$, czyli $Sx = \lambda x$. Otrzymujemy nieskończony ciąg równań

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda x_0 \\ x_{n-1} &= \lambda x_n, \ n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Jeśli $\lambda = 0$, to $x_n = 0$ dla wszystkich n. Załóżmy, że $\lambda \neq 0$. Wtedy $x_0 = 0$ oraz

$$x_n = \lambda^{-1} x_{n-1} = \lambda^{-n} x_0 = 0.$$

To oznacza, że operator S nie posiada wartości własnych.

Zbadamy teraz $\sigma_r(S)$. Załóżmy, że obraz $\mathrm{Im}\,(\lambda I - S)$ nie jest gęsty w ℓ^2. Równoważnie istnieje niezerowy element $y \in \ell^2$ taki, że $y \perp \mathrm{Im}\,(\lambda I - S)$. Niech $V = \mathrm{lin}\{e_0, e_1, e_2, \ldots\}$, gdzie $e_k = (0, \ldots, 0, \underset{k}{1}, 0 \ldots)$. Przestrzeń V jest gęsta w ℓ^2, tzn. $\overline{V} = \ell^2$. Zatem

$$(\lambda I - S)(V) \subset \mathrm{Im}\,(\lambda I - S) = (\lambda I - S)(\ell^2) = (\lambda I - S)(\overline{V}) \subset \overline{(\lambda I - S)(V)}.$$

Skorzystaliśmy z własności znanej z kursu topologii, że obraz przez odwzorowanie ciągłe domknięcia zbioru jest zawarty w domknięciu obrazu tego zbioru. To oznacza, że

$$\overline{\mathrm{Im}\,(\lambda I - S)} = \overline{(\lambda I - S)(V)}.$$

Wnioskujemy, że warunek $y \perp \mathrm{Im}\,(\lambda I - S)$ jest równoważny z warunkiem $y \perp (\lambda I - S)(V)$. Ostatni warunek z kolei oznacza, że $y \perp (\lambda I - S)(e_k)$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$. Rozwiązujemy układ równań

$$\langle y, (\lambda I - S)e_k \rangle = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Zatem

$$\langle y, \lambda e_k - e_{k+1} \rangle = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dalej

$$y_{k+1} = \overline{\lambda} y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Otrzymujemy ostatecznie

$$y_k = \overline{\lambda}^k y_0, \quad k \geqslant 1.$$

Jeśli $y_0 = 0$, to $y = 0$. Jeśli $y_0 \neq 0$, to $y \in \ell^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|\lambda| < 1$. Zatem

$$\sigma_r(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}.$$

Pozostaje zbadać liczby λ spełniające $|\lambda| \geqslant 1$. Sprawdzimy, kiedy $\lambda I - S$ jest „na”. W tym celu dla $y \in \ell^2$ rozwiązujemy równanie $(\lambda I - S)x = y$. Wtedy

$$\begin{aligned} \lambda x_0 &= y_0, \\ \lambda x_n - x_{n-1} &= y_n, \ n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$x_n = \lambda^{-1} y_n + \lambda^{-1} x_{n-1}.$$

Zatem

$$x_n = \lambda^{-1} y_n + \lambda^{-2} y_{n-1} + \ldots + \lambda^{-n-1} y_0. \tag{1.1}$$

Niech $y = e_0$, gdzie

$$e_0 = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \geqslant 1. \end{cases}$$

Wtedy
$$x_n = \lambda^{-n-1}, \ n \geqslant 0.$$
Dla $|\lambda| = 1$ ciąg (x_n) nie należy do ℓ^2. Zatem
$$\sigma(S) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \, : \, |\lambda| \leqslant 1\}.$$
Niech $|\lambda| > 1$. Sprawdzamy normę rozwiązania x z (1.1).
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} \lambda^{-k-1} y_{n-k} \right|^2 &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{n} |\lambda|^{-k-1} |y_{n-k}| \, |\lambda|^{-l-1} |y_{n-l}| \\ &= \sum_{k,l=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1} |\lambda|^{-l-1} \sum_{n=\max(k,l)}^{\infty} |y_{n-k}||y_{n-l}| \\ &\leqslant \sum_{k,l=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1} |\lambda|^{-l-1} \left(\sum_{n=\max(k,l)}^{\infty} |y_{n-k}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=\max(k,l)}^{\infty} |y_{n-l}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant \sum_{k,l=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1} |\lambda|^{-l-1} \, \|y\|_2^2 = \left(\frac{1}{|\lambda| - 1} \right)^2 \|y\|_2^2.\end{aligned}$$
Zatem
$$\|(\lambda I - S)^{-1} y\|_2 = \|x\|_2 \leqslant \frac{1}{|\lambda| - 1} \|y\|_2,$$
czyli
$$\|(\lambda I - S)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - 1}.$$
Podsumowując
$$\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant 1\}.$$

Uwaga 1.6.

1. W przykładzie można zauważyć, że jeśli $\lambda \in \sigma(S)$, to $|\lambda| \leqslant \|S\|$. Ta własność zachodzi dla każdego ograniczonego operatora (por. Wniosek 1.8).

2. Zbiór $\sigma(S)$ jest domknięty i również ta własność jest spełniona dla dowolnego ograniczonego operatora liniowego (por. Twierdzenie 1.10).

Twierdzenie 1.7. *Załóżmy, że ograniczony operator liniowy $T : X \to X$, gdzie X jest przestrzenią Banacha, spełnia $\|T\| < 1$. Wtedy operator $I - T$ jest odwracalny oraz*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Dowód. Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n$ jest bezwzględnie zbieżny, bo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Dzięki zupełności przestrzeni $B(X)$ symbol $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n$ określa ograniczony operator liniowy. Zauważmy, że

$$AT = TA = \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1} = A - I.$$

Zatem

$$A(I - T) = (I - T)A = I.$$

Stąd $A = (I - T)^{-1}$. □

Wniosek 1.8. *Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz $T \in B(X)$. Jeśli $|\lambda| > \|T\|$, to operator $\lambda I - T$ jest odwracalny, tzn. $\lambda \in \varrho(T)$.*

Dowód. Mamy

$$\lambda I - T = \lambda(I - \lambda^{-1}T), \;\; \|\lambda^{-1}T\| < 1.$$

Z poprzedniego twierdzenia operator $I - \lambda^{-1}T$ jest więc odwracalny. Zatem odwracalny jest też $\lambda I - T$. □

Uwaga 1.9. Z twierdzenia wynika, że dla $\|T\| < 1$ mamy

$$\|(I - T)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Zatem przy założeniu $\|T\| < |\lambda|$ otrzymujemy

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| = |\lambda|^{-1}\|(I - \lambda^{-1}T)^{-1}\| \leqslant |\lambda|^{-1}\frac{1}{1 - |\lambda|^{-1}\|T\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

Twierdzenie 1.10. *Dla $T \in B(X)$, gdzie X jest przestrzenią Banacha, zbiór rezolwenty $\varrho(T)$ jest otwartym podzbiorem w $\mathbb{C}$. Ponadto funkcja*

$$R_z(T) = (zI - T)^{-1}, \ z \in \varrho(T)$$

jest analitycznym odwzorowaniem zbioru $\varrho(T)$ w $B(X)$, tzn. w otoczeniu każdego punktu z_0 funkcja $R_z(T)$ przedstawia się za pomocą bezwzględnie zbieżnego szeregu potęgowego postaci

$$R_z(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n A_n, \ A_n \in B(X).$$

Zachodzi też wzór

$$R_z(T) - R_w(T) = -(z - w) R_z(T) R_w(T). \tag{1.2}$$

Uwaga 1.11. Wzór (1.2) można kojarzyć z tożsamością

$$\frac{1}{z-t} - \frac{1}{w-t} = -\frac{z-w}{(z-t)(w-t)}.$$

Dowód. Niech $z_0 \in \varrho(T)$. Pokażemy, że liczby z leżące blisko z_0 należą do $\varrho(T)$. Mamy

$$zI - T = (z_0 I - T) - (z_0 - z)I = (z_0 I - T)[I - (z_0 - z)(z_0 I - T)^{-1}]. \tag{1.3}$$

Załóżmy, że

$$|z - z_0| < \frac{1}{\|(z_0 I - T)^{-1}\|}.$$

Wtedy

$$\|(z - z_0)(z_0 I - T)^{-1}\| < 1.$$

Z Twierdzenia 1.7 operator $I - (z_0 - z)(z_0 I - T)^{-1}$ jest odwracalny. Zatem ze wzoru (1.3) operator $zI - T$ jest odwracalny jako złożenie dwu operatorów odwracalnych. Czyli $z \in \varrho(T)$, więc zbiór $\varrho(T)$ jest otwarty.

Ze wzoru (1.3) i Twierdzenia 1.7 otrzymujemy

$$\begin{aligned} R_z(T) = (zI - T)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (z_0 - z)^n (z_0 I - T)^{-n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n A_n, \quad A_n = (-1)^n (z_0 I - T)^{-n-1}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Obliczamy

$$\begin{aligned} R_z(T) - R_w(T) &= (zI - T)^{-1} - (wI - T)^{-1} \\ &= (zI - T)^{-1}[(wI - T) - (zI - T)](wI - T)^{-1} \\ &= -(z - w)(zI - T)^{-1}(wI - T)^{-1} = -(z - w)R_z(T)R_w(T) \end{aligned}$$

□

Dla $z, z_o \in \varrho(T)$ na podstawie (1.4) mamy

$$R_z(T) - R_{z_0}(T) = \sum_{n=0}^{\infty}(z_0 - z)^n(z_0I - T)^{-n-1} - (z_0I - T)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(z_0 - z)^n(z_0I - T)^{-n-1}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \|R_z(T) - R_{z_0}(T)\| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |z - z_0|^n \|(z_0I - T)^{-1}\|^{n+1} \\ &= \frac{|z - z_0|\|R_{z_0}(T)\|^2}{1 - |z - z_0|\|R_{z_0}(T)\|} \end{aligned}$$

przy założeniu, że $|z - z_0| < \|R_{z_0}(T)\|^{-1}$. Z obliczeń wynika, że

$$\lim_{z \to z_0} R_z(T) = R_{z_0}(T).$$

Zatem, korzystając z (1.2), otrzymujemy

$$\lim_{z \to z_0} \frac{R_z(T) - R_{z_0}(T)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (-1)R_{z_0}(T)R_z(T) = -R_{z_0}(T)^2.$$

To oznacza, że funkcja $z \mapsto R_z(T)$ posiada pochodną zespoloną jako funkcja z podzbioru $\varrho(T)$ w $B(X)$.

Twierdzenie 1.12. *Niech T będzie ograniczonym operatorem liniowym na przestrzeni Banacha X. Wtedy spektrum $\sigma(T)$ jest niepustym i domkniętym podzbiorem w $\mathbb{C}$.*

Dowód. Domkniętość zbioru wynika z otwartości zbioru rezolwenty. Załóżmy, że spektrum $\sigma(T)$ jest zbiorem pustym. Wtedy funkcja $R_z(T)$ jest określona na całej płaszczyźnie zespolonej. Dla ustalonych elementu $x \in X$ oraz funkcjonału $x^* \in X^*$ rozważamy funkcję

$$f(z) = x^*(R_z(T)x).$$

Funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w całej płaszczyźnie zespolonej. Z zadania 18 mamy, że $\|R_z(T)\| \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Wtedy $f(z) \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Funkcja $f(z)$ jest zatem ograniczona w $\mathbb{C}$. Na podstawie twierdzenia Liouville'a funkcja f jest stała, czyli $f(z) \equiv 0$. Stąd $x^*(R_z(T)x) = 0$ dla dowolnego funkcjonału x^*, czyli $R_z(T)x = 0$ dla dowolnego elementu $x \in X$. Zatem $R_z(T) = 0$, co stoi w sprzeczności z odwracalnością operatora $R_z(T)$. □

Uwaga 1.13. Dla $X = \mathbb{C}^n$ operatory $T : X \to X$ utożsamiamy z macierzami wymiaru $n\times n$. Wtedy z zasadniczego twierdzenia algebry mamy $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda I - T) \neq 0\} \neq \emptyset$.

Definicja 1.14. *Promieniem spektralnym operatora $T \in B(X)$. nazywamy liczbę*

$$r(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Twierdzenie 1.15. *Dla $T \in B(X)$, gdzie X jest przestrzenią Banacha, istnieje granica $\lim\limits_n \|T^n\|^{1/n}$ oraz granica ta jest równa $r(T)$. Ponadto, jeśli X jest przestrzenią Hilberta oraz $T^* = T$, to $r(T) = \|T\|$.*

Dowód. Jeśli $T^{n_0} = 0$ dla pewnej liczby n_0, to $T^n = 0$ dla $n \geqslant n_0$. Wtedy $\lim_n \|T^n\|^{1/n} = 0$. Załóżmy zatem, że $T^n \neq 0$ dla wszystkich potęg n. Oznaczmy $a_n = \log \|T^n\|$. Zauważmy, że

$$a_{n+m} \leqslant a_n + a_m.$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} a_{n+m} = \log \|T^{n+m}\| = \log \|T^n T^m\| \leqslant \log \|T^n\| \|T^m\| \\ = \log \|T^n\| + \log \|T^m\| = a_n + a_m. \end{aligned}$$

Istnienie granicy ciągu a_n wynika z następnego lematu.

Lemat 1.16. *Jeśli ciąg liczb rzeczywistych a_n spełnia warunek $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$, to istnieje granica (być może $-\infty$) ciągu a_n/n oraz*

$$\lim_n \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n}.$$

Dowód. Mamy

$$a_{np+r} \leqslant a_{np} + a_r \leqslant na_p + a_r$$

dla dowolnych liczb naturalnych $n,\ p$ i r. Ustalmy liczbę p. Każdą liczbę m można zapisać w postaci $m = np + r$, gdzie $0 \leqslant r \leqslant p - 1$. Zatem

$$\frac{a_m}{m} = \frac{a_{np+r}}{np+r} \leqslant \frac{n}{np+r} a_p + \frac{1}{np+r} a_r.$$

Gdy $m \to \infty$, to $n \to \infty$, więc

$$\limsup \frac{a_m}{m} \leqslant \frac{a_p}{p}.$$

Ponieważ p jest dowolną liczbą naturalną, to

$$\limsup \frac{a_m}{m} \leqslant \inf_p \frac{a_p}{p} \leqslant \liminf \frac{a_m}{m}.$$

Stąd granice górna i dolna muszą być sobie równe. □

Z lematu wynika, że

$$\lim_n \|T^n\|^{1/n} = \inf_n \|T^n\|^{1/n}.$$

Załóżmy, że $|z| > \inf_n \|T^n\|^{1/n}$. Pokażemy, że wtedy operator $zI - T$ jest odwracalny. Istotnie, dla pewnej liczby n mamy $|z| > \|T^n\|^{1/n}$. Stąd $|z|^n > \|T^n\|$. Wtedy

$$z^n I - T^n = z^n (I - \frac{1}{z^n} T^n)$$

jest operatorem odwracalnym, bo $\|z^{-n} T^n\| < 1$. Z drugiej strony mamy

$$\begin{gathered} z^n I - T^n = (zI - T)S = S(zI - T), \\ \text{dla } \ S = z^{n-1} I + z^{n-2} T + \ldots + z T^{n-2} + T^{n-1}. \end{gathered}$$

Odwracalność operatora $zI - T$ wynika z prostego algebraicznego faktu, którego dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Fakt 1.17. *Załóżmy, że w półgrupie A z jednością, element a jest odwracalny oraz $a = bc = cb$ dla pewnych elementów b i c. Wtedy elementy b i c też są odwracalne.*

Zatem $z \notin \sigma(T)$. W konsekwencji otrzymujemy

$$\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| \leqslant \inf_n \|T^n\|^{1/n}\}.$$

To oznacza, że $r(T) \leqslant \inf_n \|T^n\|^{1/n}$.

Niech teraz $r > r(T)$. Tzn. operator $R_z(T)$ istnieje dla $|z| \geqslant r$. Ustalmy element $x \in X$ i funkcjonał $x^* \in X^*$. Funkcja

$$z \mapsto x^*(R_z(T)x)$$

jest holomorficzna dla $|z| > r(T)$. Zatem ta funkcja jest holomorficzna w pierścieniu $r \leqslant |z| \leqslant s$. Wtedy

$$I_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} x^*(R_z(T)x) z^n \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=s} x^*(R_z(T)x) z^n \, dz.$$

Rozważmy $s > \|T\|$. Wtedy dla $|z| = s$ możemy rozwinąć $R_z(T)$ w absolutnie zbieżny szereg

$$R_z(T) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+1)} T^k,$$

Zatem

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} x^*(T^k x) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=s} z^{n-(k+1)} \, dz = x^*(T^n x),$$

bo tylko jeden składnik (dla $k = n$) jest niezerowy. Otrzymujemy zatem

$$x^*(T^n x) = I_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} x^*(R_z(T)x) z^n \, dz.$$

Dalej

$$|x^*(T^n x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} 2\pi r \, r^n \max_{|z|=r} \|R_z(T)\| \, \|x\| \, \|x^*\| = r^{n+1} \max_{|z|=r} \|R_z(T)\| \, \|x\| \, \|x^*\|.$$

Ostatecznie

$$\|T^n\| = \sup_{\substack{\|x^*\| \leqslant 1 \\ \|x\| \leqslant 1}} |x^*(T^n x)| \leqslant r^{n+1} \max_{|z|=r} \|R_z(T)\|.$$

Stąd

$$\lim_n \|T^n\|^{1/n} \leqslant r.$$

Ponieważ r było dowolną liczbą większą do $r(T)$, to

$$\lim_n \|T^n\|^{1/n} \leqslant r(T).$$

Niech $T \in B(\mathcal{H})$. Dla $x \in \mathcal{H}$ mamy

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leqslant \|T^*Tx\|\|x\| \leqslant \|T^*T\|\|x\|^2.$$

Zatem

$$\|T\|^2 \leqslant \|T^*T\| \leqslant \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2.$$

Stąd $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Jeśli $T^* = T$, to $\|T^2\| = \|T\|^2$. Potęgi operatora T są również samosprzężone, więc

$$\|T^{2^n}\| = \|T^{2^{n-1}}\|^2 = \|T^{2^{n-2}}\|^4 = \ldots = \|T\|^{2^n}.$$

Czyli

$$\|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \|T\|.$$

Przechodząc do granicy otrzymamy $r(T) = \|T\|$. □

Wniosek 1.18. *Jeśli $T \in B(\mathcal{H})$ jest operatorem normalnym, tzn. $T^*T = TT^*$, to $r(T) = \|T\|$.*

Dowód. Wykonujemy obliczenia

$$\|T^{2^n}\|^2 = \|(T^{2^n})^*T^{2^n}\| = \|(T^*)^{2^n}T^{2^n}\| = \|(T^*T)^{2^n}\| = \|T^*T\|^{2^n} = \|T\|^{2^{n+1}}$$

Zatem

$$\|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \|T\|.$$

Przechodząc do granicy otrzymujemy tezę. □

Wniosek 1.19. *Jeśli $T \in B(\mathcal{H})$ jest operatorem normalnym, to $\|T^n\| = \|T\|^n$.*

Dowód. Mamy

$$\|T^n\| = r(T^n) = \lim_k \|T^{nk}\|^{1/k} = (\lim_k \|T^{nk}\|^{1/nk})^n = r(T)^n = \|T\|^n.$$

□

Przykład 1.20. Rozważmy operator $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ zadany wzorem

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y)\,dy.$$

Obraz $\operatorname{Im} T$ jest zawarty w $C[0,1]$. Istotnie, z nierówności Schwarza mamy dla $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 1$

$$\begin{aligned}|(Tf)(x_2) - (Tf)(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(y)\,dy\right| &= \left|\int_0^1 f(y)\chi_{[x_1,x_2]}(y)\,dy\right| \\ &\leqslant \|f\|_2 \|\chi_{[x_1,x_2]}\|_2 = \sqrt{x_2 - x_1}\|f\|_2.\end{aligned}$$

Zatem T nie jest operatorem odwracalnym. Obliczmy T^2.

$$\begin{aligned}(T^2 f)(x) = \int_0^x (Tf)(y)\,dy = \int_0^x \left(\int_0^y f(z)\,dz\right)\,dy \\ \int_0^x f(z)\left(\int_z^x \,dy\right)\,dz = \int_0^x (x-z)f(z)\,dz.\end{aligned}$$

Udowodnimy przez indukcję, że

$$(T^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-y)^{n-1} f(y)\,dy. \tag{1.5}$$

Zakładamy, że wzór jest prawdziwy i sprawdzamy następną potęgę.

$$\begin{aligned}(T^{n+1} f)(x) &= \int_0^x (T^n f)(y)\,dy = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x \left(\int_0^y (y-z)^{n-1} f(z)\,dz\right)\,dy \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(z)\left(\int_z^x (y-z)^{n-1}\,dy\right)\,dz = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-z)^n f(z)\,dz.\end{aligned}$$

Korzystając z (1.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|T^{n+1}f\|_2^2 &= \int_0^1 |(T^{n+1}f)(x)|^2\,dx = \frac{1}{(n!)^2}\int_0^1 \left|\int_0^x (x-y)^n f(y)\,dy\right|^2\,dx \\ &\leqslant \frac{1}{(n!)^2}\int_0^1 \left(\int_0^x |f(y)|^2\,dy\right)\left(\int_0^x (x-y)^{2n}\,dy\right)\,dx \leqslant \|f\|_2^2 \frac{1}{(n!)^2}\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,dx \\ &= \frac{1}{(n!)^2(2n+1)(2n+2)}\|f\|_2^2 \leqslant \frac{1}{((n+1)!)^2}\|f\|_2^2.\end{aligned}$$

Zatem $\|T^{n+1}\| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$. Stąd $\lim\limits_n \|T^n\|^{1/n} = 0$. W rezultacie $\sigma(T) = \{0\}$.

Twierdzenie 1.21. *Niech $T : X \to X$ będzie operatorem ograniczonym na przestrzeni Banacha X. Dla wielomianu $p(z)$, o współczynnikach zespolonych, mamy*

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T),$$

tzn. każda liczba w spektrum operatora $p(T)$ ma postać $p(\lambda)$, gdzie $\lambda \in \sigma(T)$.

Dowód. Pominiemy przypadek $\deg p = 0$. Załóżmy, że $p(\lambda) \notin \sigma(P(T)$. Wtedy operator $p(T)-p(\lambda)I$ jest odwracalny. Niech $q(z) = \dfrac{p(z) - p(\lambda)}{z - \lambda}$. Wtedy $q(z)$ jest wielomianem oraz $p(z) - p(\lambda) = (z - \lambda)q(z)$. Zatem

$$p(T) - p(\lambda)I = q(T)(T - \lambda I) = (T - \lambda I)q(T).$$

To oznacza, że operator $T - \lambda I$ jest odwracalny, czyli $\lambda \notin \sigma(T)$. Zatem, jeśli $\lambda \in \sigma(T)$, to $p(\lambda) \in \sigma(p(T))$. Otrzymaliśmy $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$.

Załóżmy, że $\alpha \in \sigma(p(T))$. Z zasadniczego twierdzenia algebry wielomian $p(z) - \alpha$ rozkłada się na czynniki liniowe

$$p(z) - \alpha = c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \ldots (z - \lambda_n), \qquad c \neq 0$$

oraz $p(\lambda_i) = \alpha$, dla $j = 1, 2, \ldots, n$. Wtedy

$$p(T) - \alpha I = c(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \ldots (T - \lambda_n I).$$

Z założenia lewa strona jest operatorem nieodwracalnym. Zatem przynajmniej jeden z czynników po prawej stronie, np. $T - \lambda_j I$, jest operatorem nieodwracalnym. Stąd $\lambda_j \in \sigma(T)$. Ponieważ $p(\lambda_j) = \alpha$, to $\alpha \in p(\sigma(T))$. Otrzymaliśmy zawieranie $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$. □

Uwaga 1.22. Teza jest spełniona dla funkcji całkowitych $f(z)$, tzn. funkcji postaci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

przy czym promień zbieżności szeregu wynosi $+\infty$, lub jest większy niż $r(T)$. Wtedy operator

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$$

jest dobrze określony, bo szereg jest bezwzględnie zbieżny. Zawieranie $f(\sigma(T)) \subset \sigma(f(T))$ można udowodnić podobnie jak wyżej, korzystając z faktu, że $q(z) = \dfrac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda}$ jest funkcją całkowitą.

Twierdzenie 1.23. *Dla $T \in B(\mathcal{H})$ mamy*

$$\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} := \{\overline{z} \,:\, z \in \sigma(T)\}.$$

Dowód. Wiemy, że jeśli operator $A \in B(\mathcal{H})$ jest odwracalny, to A^* jest też odwracalny oraz $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Niech $z \notin \sigma(T)$. Tzn. $zI - T$ jest operatorem odwracalnym. Zatem $\overline{z}I - T^*$ jest też odwracalny, czyli $\overline{z} \notin \sigma(T^*)$. To daje

$$\sigma(T^*) \subseteq \overline{\sigma(T)}.$$

Stąd wynika, że

$$\sigma(T) = \sigma((T^*)^*) \subseteq \overline{\sigma(T^*)},$$

czyli

$$\overline{\sigma(T)} \subseteq \sigma(T^*).$$

□

Wniosek 1.24. *Niech $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ będzie operatorem unitarnym, tzn. $U^*U = UU^* = I$, lub równoważnie $U^* = U^{-1}$. Wtedy $\sigma(U) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$.*

Dowód. Mamy

$$\|U\|^2 = \|U^*U\| = \|I\| = 1.$$

Zatem $\|U\| = 1$, skąd wynika $\sigma(U) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leqslant 1\}$. Niech $|z| < 1$. Chcemy pokazać, że $zI - U$ jest odwracalny. Zauważmy, że

$$zI - U = zU^*U - U = -(I - zU^*)U.$$

U jest odwracalny. Operator $I - zU^*$ jest również odwracalny, bo $\|zU^*\| = |z| < 1$. Stąd $zI - U$ jest odwracalny, co dowodzi tezy wniosku. □

Uwaga 1.25. Jeśli U jest unitarny, to $\|Ux\| = \|x\|$ dla $x \in \mathcal{H}$. Rzeczywiście

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle U^*Ux, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2.$$

Podobnie $\|U^*x\| = \|x\|$.

Twierdzenie 1.26. *Jeśli operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ jest normalny, to $\|Tx\| = \|T^*x\|$ dla $x \in \mathcal{H}$.*

Dowód. Mamy

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2.$$

□

Wniosek 1.27. *Jeśli T jest operatorem normalnym, to*

$$\|(\lambda I - T)x\| = \|(\overline{\lambda} I - T^*)x\|$$

dla $x \in \mathcal{H}$. Ponadto, jeśli λ jest wartością własną operator T, to $\overline{\lambda}$ jest wartością własną operatora T^*, z tymi samymi wektorami własnymi.

Dowód. Z założenia wynika, że $\lambda I - T$ jest operatorem normalnym, więc możemy zastosować poprzednie twierdzenie. Druga część wniosku wynika z obserwacji, że $Tx = \lambda x$ oznacza $(\lambda I - T)x = 0$. $\square$

Twierdzenie 1.28. *Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym operatora normalnego są ortogonalne.*

Dowód. Niech $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ będzie operatorem normalnym oraz $Tx = \lambda x$ i $Ty = \mu y$ dla $\lambda \neq \mu$ oraz pewnych niezerowych wektorów $x, y \in \mathcal{H}$. Obliczamy

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \langle x, \overline{\mu} y\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

Zatem $\langle x, y\rangle = 0$. $\square$

Wniosek 1.29. *Niech T będzie operatorem normalnym na $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$. Wtedy istnieje baza ortonormalna $v_1, v_2, \ldots, v_n$ w $\mathbb{C}^n$ złożona z wektorów własnych operatora T.*

Uwaga 1.30. Teza wniosku oznacza, że w bazie wektorów $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ macierz operatora T ma postać diagonalną z liczbami $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ na przekątnej.

Dowód. Utożsamimy operator T z macierzą w standardowej bazie przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Rozwiązujemy równanie

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - T) = 0$$

ze względu na λ. Funkcja $p(z)$ jest wielomianem stopnia n, więc na podstawie Zasadniczego Twierdzenia Algebry istnieje rozwiązanie $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Wtedy λ_1 jest wartością własną odpowiadającą pewnemu wektorowi $v_1 \in \mathbb{C}^n$. Tzn. $Tv_1 = \lambda_1 v_1$. Rozkładamy przestrzeń na

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{C}v_1 \oplus \mathcal{M}_1, \quad \text{gdzie } \mathcal{M}_1 = \{v_1\}^\perp.$$

Mamy $\mathcal{M}_1 \simeq \mathbb{C}^{n-1}$ oraz $T(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathcal{M}_1$. Rzeczywiście, niech $v \in \mathcal{M}_1$. Chcemy sprawdzić, czy $Tv \in \mathcal{M}_1$. W tym celu obliczamy

$$\langle Tv, v_1 \rangle = \langle v, T^* v_1 \rangle = \langle v, \overline{\lambda_1} v_1 \rangle = \lambda_1 \langle v, v_1 \rangle = 0.$$

Traktujemy T jako operator na $\mathcal{M}_1 \simeq \mathbb{C}^{n-1}$. Powtarzamy całe wcześniejsze rozumowanie, aby znaleźć wartość własną λ_2, wektor własny v_2 i następną podprzestrzeń $\mathcal{M}_2$. Itd. $\square$

Twierdzenie 1.31. *Dla ograniczonego operatora samosprzężonego w przestrzeni Hilberta spektrum jest zawarte w osi rzeczywistej.*

Dowód. Załóżmy, że $z = \lambda + \mu i$, gdzie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, oraz $\mu \neq 0$. Pokażemy, że operator $zI - T$ jest odwracalny, tzn. $z \notin \sigma(T)$. Wykonujemy obliczenia

$$\begin{aligned}\|(zI - T)v\|^2 &= \langle (zI - T)v, (zI - T)v \rangle = \langle (\overline{z}I - T)(zI - T)v, v \rangle \\ &= \langle (\lambda^2 + \mu^2)I - 2\lambda T + T^2)v, v \rangle = \langle [(\lambda I - T)^2 + \mu^2 I]v, v \rangle \\ &= \langle (\lambda I - T)v, (\lambda I - T)v \rangle + \mu^2 \langle v, v \rangle \geqslant \mu^2 \|v\|^2.\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc

$$\|(zI - T)v\| \geqslant |\mu| \, \|v\|. \tag{1.6}$$

To oznacza, że operator $zI - T$ jest różnowartościowy oraz, że obraz $\mathrm{Im}\,(zI - T)$ jest domknięty. Korzystając z zadania 73 [5] mamy

$$\mathcal{H} = \ker(\overline{z}I - T) \oplus \mathrm{Im}\,(zI - T).$$

Pierwsza podprzestrzeń jest zerowa, bo $\overline{z} \notin \mathbb{R}$. Zatem $\mathcal{H} = \mathrm{Im}\,(zI - T)$, tzn. $zI - T$ jest operatorem „1-1” i „na”. Stąd $zI - T$ jest odwracalny algebraicznie. Ponadto z (1.6) wynika ograniczoność operatora odwrotnego. $\square$

2 Operatory dodatnie

Definicja 2.1. *Operator $A \in B(\mathcal{H})$ nazywamy dodatnim, jeśli $\langle Av, v \rangle \geqslant 0$ dla wszystkich wektorów $v \in \mathcal{H}$. Piszemy wtedy $A \geqslant 0$.*

Fakt 2.2. *Każdy operator dodatni jest samosprzężony.*

Dowód. Z założenia mamy w szczególności, że $\langle Av, v\rangle = \langle v, Av\rangle$. Na podstawie tożsamości polaryzacyjnej otrzymujemy

$$\langle Av, w\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{4}\langle A(v+i^k w), v+i^k w\rangle i^k$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{4}\langle v+i^k w, A(v+i^k w)\rangle i^k = \langle v, Aw\rangle = \langle A^* v, w\rangle.$$

Stąd $A^* = A$. □

Uwaga 2.3. *Warto zapamiętać, że z tożsamości polaryzacyjnej wynika, że jeśli dla dwu operatorów A i B z $B(\mathcal{H})$ mamy $\langle Av, v\rangle = \langle Bv, v\rangle$, to $A = B$.*

Przykłady. (a) $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ oraz A jest macierzą postaci

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$$

Wtedy $\langle Av, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} k|v_k|^2 \geqslant 0$, dla $v = (v_k)_{k=1}^n$.

(b) Dla $\mathcal{H} = L^2(0,1)$ określamy $(Af)(x) = xf(x)$. Wtedy

$$\langle Av, v\rangle = \int_0^1 x|f(x)|^2\,dx \geqslant 0.$$

Lemat 2.4. *Jeśli $A \geqslant 0$ oraz $C \in B(\mathcal{H})$, to $C^*AC \geqslant 0$.*

Dowód.
$$\langle C^*ACv, v\rangle = \langle A(Cv), Cv\rangle \geqslant 0.$$

□

Lemat 2.5. *Jeśli $A, B \geqslant 0$ oraz $A + B = 0$, to $A = B = 0$.*

Dowód. Mamy

$$\langle Av, v\rangle + \langle Bv, v\rangle = \langle (A+B)v, v\rangle = 0.$$

Ponieważ oba składniki są nieujemne, to oba muszą się zerować dla dowolnego wektora v. Stąd $A = B = 0$. $\square$

Lemat 2.6. *Jeśli A jest operatorem samosprzężonym, to*

$$\|A\| = \sup_{\|v\|\leqslant 1} |\langle Av, v\rangle| = \sup_{\|v\|=1} |\langle Av, v\rangle|.$$

Dowód. Mamy

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|u\|\leqslant 1\\ \|v\|\leqslant 1}} |\langle Av, w\rangle| = \sup_{\substack{\|u\|\leqslant 1\\ \|v\|\leqslant 1}} \operatorname{Re}\langle Av, w\rangle,$$

bo można dobrać liczbę zespoloną α o module 1 taką, że

$$|\langle Av, w\rangle| = \langle Av, \alpha w\rangle.$$

Z tożsamości polaryzacyjnej otrzymujemy

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle Av, w\rangle &= \frac{1}{4}\langle A(v+w), v+w\rangle - \frac{1}{4}\langle A(v-w), v-w\rangle \\ &= \frac{1}{4}\Big[\|v+w\|^2\langle Ay, y\rangle - \|v-w\|^2\langle Az, z\rangle\Big],\end{aligned}$$

gdzie

$$y = \frac{v+w}{\|v+w\|}, \quad z = \frac{v-w}{\|v-w\|},$$

o ile $v \pm w \neq 0$. Zatem

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle Av, w\rangle &\leqslant \frac{1}{4}\Big[\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2\Big] \sup_{\|y\|=1} |\langle Ay, y\rangle| \\ &= \frac{1}{4}\Big[2\|v\|^2 + 2\|w\|^2\Big] \sup_{\|y\|=1} |\langle Ay, y\rangle|.\end{aligned}$$

W rezultacie mamy

$$\|A\| \leqslant \sup_{\|y\|=1} |\langle Ay, y\rangle|.$$

Oczywiście nierówność przeciwna jest też spełniona, bo

$$|\langle Ay, y\rangle| \leqslant \|Ay\|\,\|y\| \leqslant \|A\|\,\|y\|^2.$$

Czyli

$$\sup_{\|y\|=1} |\langle Ay, y\rangle| \leqslant \|A\|.$$

□

Lemat 2.7. *Mamy*

$$\sqrt{1-x} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)4^n} x^n, \quad |x| \leqslant 1,$$

oraz szereg jest zbieżny jednostajnie.

Dowód. Wzór jest znany z kursu Analiza 1. Wiemy, że

$$\sqrt{1-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-x)^n, \qquad |x| < 1. \tag{2.1}$$

Po przekształceniu mamy

$$\binom{1/2}{n} (-1)^{n+1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)4^n} > 0.$$

Stąd równość w tezie jest spełniona dla $|x| < 1$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)4^n} x^n = 1 - \sqrt{1-x} \leqslant 1, \quad |x| < 1.$$

Obliczamy kres górny lewej strony i uzyskujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)4^n} = 1.$$

W związku z tym szereg po prawej stronie (2.1) jest zbieżny jednostajnie dla $|x| \leqslant 1$ z kryterium Weierstrassa. Stąd wyrażenie po prawej stronie (2.1) reprezentuje funkcję ciągłą na przedziale $[-1, 1]$ równą $\sqrt{1-x}$ dla $|x| < 1$. Zatem równość (2.1) jest spełniona również dla $x = \pm 1$. □

Twierdzenie 2.8. *Dla dodatniego operatora $A \in B(\mathcal{H})$ istnieje jedyny operator dodatni B spełniający $B^2 = A$, nazywany pierwiastkiem z A i oznaczamy symbolem $A^{1/2}$.*

Dowód. Możemy założyć, że $\|A\| \leqslant 1$, dzieląc w razie potrzeby przez liczbę dodatnią. Oznaczmy $X = I - A$. Wtedy

$$\langle Xv, v\rangle = \langle v, v\rangle - \langle Av, v\rangle \geqslant \|v\|^2 - \|A\|\|v\|^2 \geqslant 0.$$

Ponadto

$$0 \leqslant \langle Xv, v\rangle = \langle v, v\rangle - \langle Av, v\rangle \leqslant \|v\|^2.$$

Z Lematu 2.6 otrzymujemy więc

$$\|X\| = \sup_{\|v\|=1} \langle Xv, v\rangle \leqslant 1.$$

Oznaczmy

$$c_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)4^n}.$$

Określmy

$$B = I - \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n,$$

przez analogię ze wzorem z Lematu 2.7, bo $A = I - X$. B jest dobrze określonym operatorem, bo szereg jest bezwzględnie zbieżny znowu z Lematu 2.7. Istotnie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n X^n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} c_n \|X\|^n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1.$$

Uwaga 2.9. W przestrzeni $B(\mathcal{H})$ można pomnożyć metodą Cauchy'ego dwa szeregi bezwzględnie zbieżne i otrzymany szereg będzie bezwzględnie zbieżny. Dowód jest taki sam jak dla szeregów liczbowych, tylko symbol wartości bezwzględnej $|\cdot|$ trzeba zamienić symbolem normy operatorowej $\|\cdot\|$. Jedyna różnica polega na tym, że

$$|ab| = |a|\,|b|, \qquad \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|.$$

Sprawdzamy, czy $B^2 = A$.

$$B^2 = \left(I - \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n\right)\left(I - \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n,$$

gdzie prawa strona jest iloczynem Cauchy'ego szeregu $I - \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n$ przez siebie. Ale z Lematu 2.7 mamy

$$\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right)^2 = (\sqrt{1-x})^2 = 1 - x,$$

zatem $d_0 = 1,\ d_1 = -1$ oraz $d_n = 0$ dla $n \geqslant 2$. Czyli

$$B^2 = I - X = A.$$

Sprawdzimy nieujemność operatora B. Mamy

$$\begin{aligned}\langle Bv, v\rangle = \langle v, v\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle X^n v, v\rangle \\ \geqslant \|v\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \|X^n\|\,\|v\|^2 \geqslant \|v\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \|v\|^2 = 0.\end{aligned}$$

Skorzystaliśmy z faktu, że $\|X^n\| \leqslant \|X\|^n \leqslant 1$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1$, co wynika z Lematu 2.7.

Pozostaje sprawdzić jedyność. Załóżmy, że dla innego operatora $C \geqslant 0$ mamy $C^2 = A$. Wtedy $CA = C^3 = AC$, tzn. C i A są przemienne ze sobą. Wtedy również C i B są przemienne, co wynika z określenia operatora B. Wykonujemy obliczenie

$$\begin{aligned}(B - C)B(B - C) + (B - C)C(B - C) \\ = (B - C)(B + C)(B - C) = (B^2 - C^2)(B - C) = 0.\end{aligned}$$

Każdy z początkowych składników jest operatorem dodatnim z Lematu 2.5. Zatem

$$(B - C)B(B - C) = (B - C)C(B - C) = 0.$$

Odejmując te operatory otrzymujemy

$$0 = (B - C)B(B - C) - (B - C)C(B - C) = (B - C)^3.$$

Operator $B - C$ jest samosprzężony, więc z Lematu 1.19 wynika, że

$$0 = \|(B - C)^3\| = \|B - C\|^3,$$

czyli $C = B$. $\square$

Definicja 2.10. *Dla* $A \in B(\mathcal{H})$ *określamy*

$$|A| = (A^*A)^{1/2}.$$

Definicja 2.11. *Operator* $U \in B(\mathcal{H})$ *nazywamy częściową izometrią, jeśli* U *jest izometrią po obcięciu do podprzestrzeni* $(\ker U)^\perp$*, tzn.*

$$\|Uv\| = \|v\|, \quad \text{dla wszystkich } v \perp \ker U.$$

Uwaga 2.12. Zbiór $\operatorname{Im} U$ jest domknięty jako izometryczny obraz przestrzeni domkniętej $(\ker U)^\perp$ przez operator U. Rzeczywiście, ponieważ

$$\mathcal{H} = \ker U \oplus (\ker U)^\perp,$$

to

$$\operatorname{Im} U = U(\mathcal{H}) = U\left((\ker U)^\perp\right).$$

Lemat 2.13. *Operator* U *jest częściową izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy operator* UU^* *jest rzutem, tzn.* $(UU^*)^2 = UU^*$.

Dowód.
($\Rightarrow$) Wiemy, że $(\ker U)^\perp = \overline{\operatorname{Im} U^*}$. Ponadto $\|UU^*v\| = \|U^*v\|$. Zatem

$$\langle (UU^*)^2 v, v\rangle = \langle UU^*v, UU^*v\rangle = \|UU^*v\|^2 = \|U^*v\|^2 = \langle UU^*v, v\rangle.$$

Stąd $(UU^*)^2 = UU^*$.

($\Leftarrow$) Jeśli $(UU^*)^2 = UU^*$, to korzystając z wcześniejszych obliczeń otrzymamy, że U jest izometrią na $\operatorname{Im} U^*$. Zatem U jest izometrią na domknięciu $\overline{\operatorname{Im} U^*}$, czyli na $(\ker U)^\perp$. □

Dla częściowej izometrii U mamy dwa ortogonalne rozkłady przestrzeni

$$\mathcal{H} = \ker U \oplus (\ker U)^\perp, \qquad \mathcal{H} = (\operatorname{Im} U)^\perp \oplus \operatorname{Im} U.$$

Operator U jest izometrią z $(\ker U)^\perp$ na $\operatorname{Im} U$.

Lemat 2.14. *Jeśli* U *jest częściową izometrią, to* U^* *jest też częściową izometrią.*

Dowód. Wiemy, że $(UU^*)^2 = UU^*$. Z Lematu 2.13 wystarczy dowieść, że $(U^*U)^2 = U^*U$. Mamy $UU^*(UU^* - I) = 0$. Ponieważ U jest izometrią na $(\ker U)^\perp = \overline{\operatorname{Im} U^*}$, to U jest „1-1” na $\operatorname{Im} U^*$. Stąd $U^*(UU^* - I) = 0$. czyli

$$U^*UU^* = U^*. \tag{2.2}$$

Mnożymy z prawej strony przez U i uzyskujemy $(U^*U)^2 = U^*U$. □

Jako częściowa izometria U^* jest izometrią z $(\ker U^*)^\perp$ na $\operatorname{Im} U^*$, czyli z $\operatorname{Im} U$ na $= (\ker U)^\perp$ (odwrotnie niż U).

Ponadto UU^* jest rzutem na $\operatorname{Im} U$. Istotnie, z (2.2) mamy $UU^*(Uv) = Uv$, tzn. UU^* jest identycznością na $\operatorname{Im} U$. Co więcej UU^* zeruje się na $(\operatorname{Im} U)^\perp = \ker U^*$. Po zamianie rolami U i U^* wnioskujemy, że U^*U jest rzutem ortogonalnym na $\operatorname{Im} U^* = (\ker U)^\perp$.

Twierdzenie 2.15 (Rozkład polarny)**.** *Dla operatora $A \in B(\mathcal{H})$ istnieje jedyna częściowa izometria U spełniająca $A = U\,|A|$ oraz $\ker A = \ker U$. Ponadto $\operatorname{Im} U = \overline{\operatorname{Im} A}$.*

Dowód. Mamy

$$\langle Av, Av\rangle = \langle A^*Av, v\rangle = \langle |A|^2 v, v\rangle = \langle |A|v, |A|v\rangle$$

Zatem

$$\|Av\| = \||A|v\|.$$

Stąd wynika, że jeśli $|A|v_1 = |A|v_2$, to $Av_1 = Av_2$, bo

$$\||A|v_1 - |A|v_2\| = \||A|(v_1 - v_2)\| = \|A(v_1 - v_2)\| = \|Av_1 - Av_2\|.$$

Określamy odwzorowanie U najpierw na podprzestrzeni $\operatorname{Im}|A|$ wzorem

$$U(|A|v) = Av.$$

Z poprzednich obliczeń operator U jest dobrze określony i jest izometrią z $\operatorname{Im}|A|$ na $\operatorname{Im} A$. Zatem U rozszerza się do izometrii z $\overline{\operatorname{Im}|A|}$ na $\overline{\operatorname{Im} A}$ w oparciu o znany fakt z topologii metrycznej. Połóżmy $Uv = 0$ dla $v \in (\operatorname{Im}|A|)^\perp = \ker|A|$. Wtedy U staje się częściową izometrią oraz $\ker U = \ker|A| = \ker A$. Z definicji operatora U mamy $U|A| = A$.

Pozostaje sprawdzić jedyność. Załóżmy, że V jest również częściową izometrią spełniającą $A = V|A|$ oraz $\ker V = \ker A$. Zatem

$$V|A|v = Av = U|A|v,$$

tzn. V i U są równe na $\operatorname{Im}|A|$. Stąd $V = U$ na $\overline{\operatorname{Im}|A|}$, przez ciągłość. Z kolei na dopełnieniu ortogonalnym

$$\overline{\operatorname{Im}|A|}^\perp = \ker|A| = \ker A = \ker V = \ker U$$

operatory U i V są równe, bo oba się tam zerują. To oznacza, że $U = V$. □

Uwaga 2.16. Zauważmy U^*U jest rzutem na

$$(\ker U)^\perp = (\ker A)^\perp = (\ker |A|)^\perp = \overline{\operatorname{Im} |A|}.$$

Czyli

$$U^*A = U^*U|A| = |A|.$$

Uwaga 2.17. Jeśli A jest operatorem odwracalnym, to również A^* i iloczyn A^*A są odwracalne. W związku z tym $|A|$ jest odwracalny. Wtedy $U = A|A|^{-1}$. To oznacza, że U i U^* są odwracalne.Dalej

$$U^*U = |A|^{-1}A^*A|A|^{-1} = I,$$

zatem $U^* = U^{-1}$, co oznacza, że U jest operatorem unitarnym.

Przykłady.

(a) Niech $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$. Wtedy operator normalny A jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy A są nieujemne. Rzeczywiście, niech $A \geqslant 0$. Wtedy jeśli $Av = \lambda v$, dla $v \neq 0$, to $0 \leqslant \langle Av, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$. Zatem $\lambda \geqslant 0$. Odwrotnie, załóżmy, że wartości własne dla A są nieujemne. Wiemy, że A można przedstawić w postaci $A = CDC^{-1}$, gdzie D jest macierzą diagonalną oraz C jest macierzą unitarną. Tzn. $A = CDC^*$. Elementy na przekątnej macierzy D są nieujemne jako wartości własne macierzy A. Zatem D jest operatorem dodatnim, bo jeśli

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

to

$$\langle Dv, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |v_k|^2 \geqslant 0.$$

Zatem $A \geqslant 0$. Ponadto $A^{1/2} = CD^{1/2}C^{-1}$, gdzie

$$D^{1/2} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{1/2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n^{1/2} \end{bmatrix},$$

(c) Niech $\mathcal{H} = L^2(0,1)$ oraz $(Af)(x) = x\,f(x)$. Wtedy

$$\langle Af, f\rangle = \int_0^1 (Af)(x)\overline{f(x)}\,dx = \int_0^1 x|f(x)|^2\,dx \geqslant 0.$$

Ponadto

$$(A^{1/2}f)(x) = \sqrt{x}\,f(x).$$

(b) Niech $\mathcal{H} = \ell^2$. Określmy

$$U(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

U jest izometrią na $V = e_0^{\perp}$, gdzie $e_k = (0, \ldots, 0, \underset{k}{1}, 0, \ldots)$. Ponadto U zeruje się na $\mathbb{C}e_0$. Zatem U jest częściową izometrią. Mamy

$$U^*(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots).$$

Rzeczywiście

$$\langle U^*x, y\rangle = \langle x, Uy\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\overline{y_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n-1}\overline{y_n}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{array}{rcl} U^*U(x_0, x_1, x_2, \ldots) & = & U^*(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots), \\ UU^*(x_0, x_1, x_2, \ldots) & = & U(0, x_0, x_1, \ldots) = (x_0, x_1, x_2, \ldots). \end{array}$$

Tzn. $UU^* = I$ oraz U^*U jest rzutem na $e_0^{\perp}$.

3 Zbieżność operatorów

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi. Rozważmy $T_n,\ T \in B(X, Y)$.

Definicja 3.1. *(a) Mówimy, że ciąg operatorów T_n jest zbieżny do operatora T w normie operatorowej, jeśli*

$$\|T_n - T\|_{B(X,Y)} \underset{n}{\to} 0.$$

(b) Mówimy, że ciąg T_n jest zbieżny do T mocno, jeśli dla wszystkich elementów $x \in X$ mamy

$$\|T_n x - Tx\|_Y \underset{n}{\to} 0.$$

(c) *Mówimy, że ciąg T_n jest zbieżny do T słabo, jeśli dla wszystkich elementów $x \in X$ oraz wszystkich funkcjonałów $y^* \in Y^*$ mamy*

$$|y^*(T_n x) - y^*(Tx)| \underset{n}{\to} 0.$$

Z nierówności

$$\begin{aligned}|y^*(T_n x) - y^*(Tx)| &= |y^*(T_n x - Tx)| \leqslant \|y^*\|_{Y^*}\|T_n x - Tx\|_Y \\ &= \|y^*\|_{Y^*}\|(T_n - T)x\|_Y \leqslant \|y^*\|_{Y^*}\|x\|_X\|T_n - T\|_{B(X,Y)}\end{aligned}$$

wynika, że (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c).

Przykład 3.2. Niech $X = Y = \ell^2$ oraz

$$U(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Dla $T_n = U^n$ mamy

$$T_n(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots).$$

Zatem

$$\|T_n x\|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^2 \underset{n}{\to} 0.$$

To oznacza, że ciąg T_n jest zbieżny mocno do zera. Ponieważ

$$\|T_n\| \geqslant \|T_n e_n\| = \|e_0\| = 1,$$

to ciąg T_n nie dąży do 0 w normie operatorowej.

Mamy

$$U^*(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots).$$

Wtedy

$$(U^*)^n(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, x_0, x_1, \ldots).$$

Zatem

$$\|(U^*)^n x\|_2 = \|x\|_2.$$

Dalej

$$\langle (U^*)^n x, y\rangle = \langle (U^n)^* x, y\rangle = \langle x, U^n y\rangle \underset{n}{\to} 0,$$

bo $U^n y \underset{n}{\to} 0$. To oznacza, że $(U^*)^n$ dąży do 0 słabo, ale nie dąży do 0 mocno.

Uwaga 3.3. Dla $T_n, T \in B(\mathcal{H})$ mamy $T_n \underset{\text{słabo}}{\to} T$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle T_n x, y\rangle \underset{n}{\to} \langle Tx, y\rangle, \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$

Twierdzenie 3.4. *Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, a Y przestrzenią unormowaną. Wtedy każdy słabo zbieżny ciąg operatorów $T_n \in B(X,Y)$ jest ograniczony, tzn.* $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

Dowód. Załóżmy, że $T_n \underset{n}{\to} T$ słabo, tzn. dla dowolnego elementu $x \in X$ ciąg $T_n x$ jest słabo zbieżny w przestrzeni Y. Wtedy ciąg $T_n x$ jest ograniczony w Y, na podstawie wniosku z twierdzenia Banacha-Steinhausa. Zatem normy $\|T_n\|$ są wspólnie ograniczone z twierdzenia Banacha-Steinhausa. □

Rozważmy przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$. Dla $A, B \in B(\mathcal{H})$ piszemy $A \geqslant B$ jeśli $A^* = A$, $B^* = B$ oraz $A - B \geqslant 0$. Ta relacja jest przechodnia, bo jeśli $A \geqslant 0$ oraz $B \geqslant 0$, to $A + B \geqslant 0$.

Lemat 3.5. *Dla $A \geqslant 0$ mamy*

$$|\langle Au, v\rangle| \leqslant \langle Au, u\rangle^{1/2}\langle Av, v\rangle^{1/2}, \tag{3.1}$$

$$\|Au\| \leqslant \|A\|^{1/2}\langle Au, u\rangle^{1/2}. \tag{3.2}$$

Dowód. Dla $z \in \mathbb{C}$ i $u, v \in \mathcal{H}$ rozważamy wyrażenie

$$0 \leqslant \langle A(zu+v), zu+v\rangle = |z|^2\langle Au, u\rangle + \langle Av, v\rangle + 2\mathrm{Re}\,\{z\langle Au, v\rangle\}.$$

Załóżmy, że $\langle Au, v\rangle \neq 0$. Niech $z = -\lambda\,\overline{\mathrm{sgn}\,\langle Au, v\rangle}$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$0 \leqslant \langle A(zu+v), zu+v\rangle = \langle Au, u\rangle\,\lambda^2 - 2|\langle Au, v\rangle|\,\lambda + \langle Av, v\rangle.$$

Z nierówności wynika, że $\langle Au, u\rangle > 0$. Podstawmy

$$\lambda = \frac{|\langle Au, v\rangle|}{\langle Au, u\rangle}$$

Otrzymamy

$$-\frac{|\langle Au, v\rangle|^2}{\langle Au, u\rangle} + \langle Av, v\rangle$$

To dowodzi (3.1). W (3.1) podstawmy $v = Au$. Wtedy

$$\begin{aligned}\|Au\|^2 &\leqslant \langle Au, u\rangle^{1/2}\langle A^2u, Au\rangle^{1/2}\\ &\leqslant \langle Au, u\rangle^{1/2}\|A^2u\|^{1/2}\|Au\|^{1/2} \leqslant \langle Au, u\rangle^{1/2}\|A\|^{1/2}\|Au\|.\end{aligned}$$

Przy założeniu $Au \neq 0$ otrzymujemy (3.1). □

Uwaga 3.6. Dowód można również przeprowadzić przy użyciu $A^{1/2}$. Rzeczywiście

$$|\langle Au, v\rangle| = |\langle A^{1/2}u, A^{1/2}v\rangle| \leqslant \|A^{1/2}u\|\,\|A^{1/2}v\| = \langle Au, u\rangle^{1/2}\langle Av, v\rangle^{1/2},$$

$$\|Au\| \leqslant \|A^{1/2}\|\|A^{1/2}u\| = \|A^{1/2}\|\langle Au, u\rangle^{1/2} = \|A\|^{1/2}\langle Au, u\rangle^{1/2}.$$

Twierdzenie 3.7. *Niech $T_n \in B(\mathcal{H})$ będzie rosnącym i ograniczonym ciągiem operatorów dodatnich, tzn. $T_n \leqslant T_{n+1}$, oraz $\sup_n \|T_n\| < \infty$. Wtedy ciąg T_n jest zbieżny mocno.*

Dowód. Dla $v \in \mathcal{H}$ mamy

$$0 \leqslant \langle T_n v, v\rangle \leqslant \langle T_{n+1}v, v\rangle.$$

Ponadto

$$0 \leqslant \langle T_n v, v\rangle \leqslant \|T_n\|\|v\|^2 \leqslant c\|v\|^2,$$

gdzie $c = \sup_n \|T_n\|$. Zatem ciąg liczbowy $\langle T_n v, v\rangle$ jest rosnący i ograniczony, więc jest zbieżny dla dowolnego elementu v. Z tożsamości polaryzacyjnej wynika, że również ciąg $\langle T_n u, v\rangle$ jest zbieżny dla dowolnych elementów u i v. Oznaczmy

$$B(u, v) = \lim_n \langle T_n u, v\rangle.$$

Wtedy

$$|B(u, v)| \leqslant \sup_n |\langle T_n u, v\rangle| \leqslant c\|u\|\|v\|.$$

Zatem $B(u, v)$ jest ograniczoną formą hermitowską na $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Z Twierdzenia 3.24 i zadania 72 [[5]] istnieje operator samosprzężony T taki, że $B(u, v) = \langle Tu, v\rangle$. Tzn.

$$\lim_n \langle T_n u, v\rangle = \langle Tu, v\rangle.$$

Zatem ciąg T_n jest zbieżny do T słabo. Operator T jest dodatni, bo

$$0 \leqslant \langle T_n u, u\rangle \nearrow \langle Tu, u\rangle.$$

Co więcej $T \geqslant T_n$. Stosujemy (3.2) do $A = T - T_n$ i otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|Tu - T_n u\| = \|(T - T_n)u\| &\leqslant \|T - T_n\|^{1/2}\langle (T - T_n)u, u\rangle^{1/2} \\ &= \|T - T_n\|^{1/2}\langle Tu - T_n u, u\rangle^{1/2}.\end{aligned}$$

Ponieważ
$$\|T - T_n\| \leqslant \|T\| \text{ [a]}$$
to
$$\|Tu - T_nu\| \leqslant \|T\|^{1/2}\langle Tu - T_nu, u\rangle^{1/2}.$$
Zatem $\|Tu - T_nu\| \underset{n}{\to} 0$. Czyli T_n dąży do T mocno. □

4 Operatory zwarte

Definicja 4.1. *Ograniczony operator liniowy $T : X \to Y$, gdzie X i Y są przestrzeniami unormowanymi, nazywamy zwartym jeśli obraz dowolnego ograniczonego podzbioru w X jest warunkowo zwartym podzbiorem w Y, tzn. z każdego ciągu elementów tego obrazu można wybrać podciąg zbieżny.*

Uwaga 4.2. Aby operator $T : X \to Y$ był zwarty wystarczy, aby zbiór $T(B_1)$ był warunkowo zwarty, gdzie B_1 jest kulą jednostkową w X, tzn. $B_1 = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$. Rzeczywiście, każdy ograniczony zbiór jest zawarty w wielokrotności kuli jednostkowej. Więc obraz takiego zbioru jest zawarty w wielokrotności obrazu kuli jednostkowej.

Przykład 4.3. Niech $T : C[0,1] \to C[0,1]$ będzie określony wzorem
$$(Tf)(x) = \int_0^1 k(x,y)\, f(y)\, dy,$$
gdzie $k(x,y)$ jest funkcją ciągłą dwu zmiennych. Wtedy
$$\|Tf\|_\infty \leqslant \sup_{0 \leqslant x,y \leqslant 1} |k(x,y)|\, \|f\|_\infty.$$
Stąd
$$\|T\| \leqslant \|k\|_\infty := \sup_{0 \leqslant x,y \leqslant 1} |k(x,y)|.$$
Rozważmy zbiór $T(\{f \in C[0,1] : \|f\|_\infty \leqslant 1\}$. Ten zbiór jest ograniczony, bo operator T jest ograniczony. Sprawdzamy jednakową ciągłość funkcji z tego

[a] $\|T - T_n\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1}\langle (T - T_n)x, x\rangle \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1}\langle Tx, x\rangle = \|T\|$

zbioru.

$$
\begin{aligned}
|(Tf)(x) - (Tf)(x')| &= \left| \int_0^1 [k(x,y) - k(x',y)]\, f(y)\, dy \right| \\
&\leqslant \int_0^1 |k(x,y) - k(x',y)|\, |f(y)|\, dy \leqslant \|f\|_1 \sup_{0\leqslant y\leqslant 1} |k(x,y) - k(x',y)| \\
&\leqslant \|f\|_\infty \sup_{0\leqslant y\leqslant 1} |k(x,y) - k(x',y)|. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Funkcja $k(x,y)$ jest jednostajnie ciągła. Zatem dla ustalonej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia δ taka, że jeśli $|x - x'| < \delta$ oraz $|y - y'| < \delta$ to $|k(x,y) - k(x',y')| < \varepsilon$. Zatem jeśli $|x - x'| < \delta$, to

$$
\sup_{0\leqslant y\leqslant 1} |k(x,y) - k(x',y)| \leqslant \varepsilon.
$$

Czyli $|(Tf)(x) - (Tf)(x')| \leqslant \varepsilon$. Reasumując obraz kuli jednostkowej przez operator T jest ograniczony i jednakowo ciągły. Zatem z twierdzenia Arzeli-Ascoliego ten obraz jest warunkowo zwarty, więc operator T jest zwarty.

Twierdzenie 4.4. *Niech X, Y, V, i W będą przestrzeniami unormowanymi, natomiast operatory $T : X \to Y$, $A : V \to X$ oraz $B : Y \to W$ będą ograniczonymi operatorami liniowymi. Jeśli operator T jest zwarty, to zwarty jest również operator $BTA : V \to W$.*

Uwaga 4.5. Aby pokazać operator $T : X \to Y$ jest zwarty, trzeba udowodnić, że dla każdego ograniczonego ciągu x_n w X ciąg Tx_n zawiera podciąg zbieżny w Y.

Dowód. Niech v_n będzie ograniczonym ciągiem w V. Wtedy ciąg Av_n jest ograniczony w X. Zatem ciąg $T(Av_n)$ zawiera podciąg $T(Av_{n_k})$ zbieżny. Z ciągłości operatora B mamy, że podciąg $BTAv_{n_k}$ jest też zbieżny. □

Przykład 4.6. Rozważmy operator $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$

$$
(Tf)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy,
$$

gdzie $k(x,y)$ jest funkcją ciągłą dwu zmiennych. Określmy operatory $S_1 : C[0,1] \to L^2(0,1)$ oraz $S_2 : L^2(0,1) \to C[0,1]$ wzorami

$$S_1 f = f, \quad (S_2 f)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy.$$

Oba operatory są ograniczone, bo

$$\|S_1 f\|_2 = \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \leqslant \|f\|_\infty,$$

oraz

$$\begin{aligned} |(S_2 f)(x)| \leqslant \int_0^1 |k(x,y)|\, |f(y)|\, dy \leqslant \|k\|_\infty \int_0^1 |f(y)|\, dy \\ \leqslant \|k\|_\infty \left(\int_0^1 |f(y)|^2\, dy \right)^{1/2} = \|k\|_\infty \|f\|_2, \end{aligned}$$

czyli $\|S_2 f\|_\infty \leqslant \|k\|_\infty \|f\|_2$. Mamy $T = S_1 S_2$. Pokażemy, że operator S_2 jest zwarty, zatem T też będzie zwarty z poprzedniego twierdzenia. Wykażemy, że obraz kuli w $L^2(0,1)$ przez S_2 jest warunkowo zwarty w $C[0,1]$. Oczywiście obraz kuli jest ograniczony, bo operator S_2 jest ograniczony. Sprawdzamy jednakową ciągłość funkcji z obrazu kuli. Niech $\|f\|_2 \leqslant 1$. Wtedy korzystając z (4.1) otrzymamy

$$\begin{aligned} |(S_2 f)(x) - (S_2 f)(x')| \leqslant \sup_{0 \leqslant y \leqslant 1} |k(x,y) - k(x',y)|\, \|f\|_1 \\ \leqslant \sup_{0 \leqslant y \leqslant 1} |k(x,y) - k(x',y)|\, \|f\|_2, \end{aligned}$$

więc

$$|(S_2 f)(x) - (S_2 f)(x')| \leqslant \sup_{0 \leqslant y \leqslant 1} |k(x,y) - k(x',y)|.$$

Ponieważ funkcja $k(x,y)$ jest jednostajnie ciągła, to funkcje $S_2 f$, dla $\|f\|_2 \leqslant 1$ są jednakowo ciągle.

Przykład 4.7. Operatory skończenie wymiarowe, tzn. $\dim \operatorname{Im} T < \infty$, są zwarte. Istotnie, niech $T : X \to Y$ będzie ograniczonym operatorem liniowym, dla którego $T(X)$ jest przestrzenią skończonego wymiaru m. Wtedy przestrzeń $T(X)$ jest izomorficzna z $\mathbb{C}^m$ z normą euklidesową. W takiej przestrzeni każdy zbiór ograniczony jest warunkowo zwarty. W szczególności obraz kuli jednostkowej przez operator ograniczony T jest taki.

Twierdzenie 4.8. *Niech X będzie przestrzenią unormowaną, a Y przestrzenią Banacha. Załóżmy, że operatory $T_n \in B(X,Y)$ są zwarte oraz zbieżne do operatora $T \in B(X,Y)$ w normie operatorowej. Wtedy operator T też jest zwarty.*

Dowód. Rozważamy ciąg x_m elementów z kuli jednostkowej w X. Z założenia istnieje podciąg $x_m^{(1)}$ ciągu x_m taki, że ciąg $T_1 x_m^{(1)}$ jest zbieżny, np. do y_1. Z kolei istnieje podciąg $x_m^{(2)}$ ciągu $x_m^{(1)}$ taki, że ciąg $T_2 x_m^{(2)}$ jest zbieżny, np. do y_2. Postępując tak dalej znajdziemy podciąg $x_m^{(n)}$ ciągu $x_m^{(n-1)}$ taki, że ciąg $T_n x_m^{(n)}$ jest zbieżny, np. do y_n. Określmy nowy ciąg $\widetilde{x}_m = x_m^{(m)}$. Dla $m \geqslant n$ wyrazy ciągu $\widetilde{x}_m$ pochodzą z podciągu $x_m^{(n)}$, tzn. ciąg $\widetilde{x}_m$, $m \geqslant n$ jest podciągiem ciągu $x_m^{(n)}$. Zatem $T_n \widetilde{x}_m \underset{m}{\to} y_n$. Sprawdzimy, że ciąg y_n jest zbieżny. Mamy

$$\|y_l - y_k\| = \lim_m \|T_l \widetilde{x}_m - T_k \widetilde{x}_m\|.$$

Ale

$$\|T_l \widetilde{x_m} - T_k \widetilde{x}_m\| = \|(T_l - T_k)\widetilde{x}_m\| \leqslant \|T_l - T_k\| \|\widetilde{x}_m\| \leqslant \|T_l - T_k\|.$$

Zatem ciąg y_n spełnia warunek Cauchy'ego. Z zupełności przestrzeni Y ciąg y_n jest zbieżny do pewnego elementu y. Pokażemy, że $T\widetilde{x}_m \underset{m}{\to} y$. Mamy

$$\begin{aligned}\|T\widetilde{x}_m - y\| &\leqslant \|T\widetilde{x}_m - T_n\widetilde{x}_m\| + \|T_n\widetilde{x}_m - y_n\| + \|y_n - y\| \\ &\leqslant \|T - T_n\| + \|T_n\widetilde{x}_m - y_n\| + \|y_n - y\|.\end{aligned}$$

Dla liczby dodatniej ε wybieramy n odpowiednio duże tak, aby $\|T - T_n\| < \varepsilon/3$ oraz $\|y_n - y\| < \varepsilon/3$. Następnie dla ustalonej wartości n istnieje liczba m_0 tak, że dla $m \geqslant m_0$ zachodzi $\|T_n\widetilde{x}_m - y_n\| < \varepsilon/3$. Wtedy dla $m \geqslant m_0$ otrzymujemy

$$\|T\widetilde{x}_m - y\| < \varepsilon.$$

□

Przykład 4.9. Rozważmy ponownie operator $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ z Przykładu 4.6. Na podstawie twierdzenia Stone'a-Weierstrassa kombinacje liniowe funkcji postaci $a(x)b(y)$ leżą gęsto w przestrzeni $C([0,1]^2)$. Zatem istnieje ciąg funkcji $k_n(x,y)$ postaci $k_n(x,y) = \sum_{k=1}^{N} a_k(x)b_k(y)$ (przy czym N i funkcje a_k oraz b_k zależą od n) takich, że $k_n(x,y) \underset{n}{\rightrightarrows} k(x,y)$. Określmy operatory

$$(T_n f)(x) = \int_0^1 k_n(x,y)f(y)\,dy = \sum_{k=1}^{N} a_k(x) \int_0^1 b_k(y)f(y)\,dy.$$

Zatem

$$\operatorname{Im} T_n \subseteq \operatorname{lin}\{a_1(x), a_2(x), \ldots, a_N(x)\}.$$

To oznacza, że T_n jest operatorem skończenie wymiarowym. W szczególności T_n jest operatorem zwartym. Ponadto

$$|[(T_n - T)f](x)| = \left| \int_0^1 [k_n(x,y) - k(x,y)]f(y)\,dy \right| \leqslant \int_0^1 |k_n(x,y) - k(x,y)|\,|f(y)|\,dy$$
$$\leqslant \sup_{0 \leqslant x,y \leqslant 1} |k_n(x,y) - k(x,y)|\,\|f\|_1 \leqslant \sup_{0 \leqslant x,y \leqslant 1} |k_n(x,y) - k(x,y)|\,\|f\|_2.$$

Stąd otrzymujemy

$$\|(T_n - T)f\|_2 \leqslant \sup_{0 \leqslant x,y \leqslant 1} |k_n(x,y) - k(x,y)|\,\|f\|_2.$$

Zatem

$$\|T_n - T\| \leqslant \sup_{0 \leqslant x,y \leqslant 1} |k_n(x,y) - k(x,y)| \underset{n}{\to} 0.$$

Twierdzenie 4.10. *Niech T będzie ograniczonym operatorem liniowym na przestrzeni Hilberta. T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy T^* jest zwarty.*

Dowód. Wiemy, że operator T można zapisać w postaci $T = U|T|$ oraz $U^*T = |T|$. Jeśli T jest zwarty, to zwarty jest też $|T|$. Wtedy również $T^* = |T|U$ jest zwarty. □

Twierdzenie 4.11. *W ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ ograniczony operator liniowy T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy przekształca ciągi słabo zbieżne do zera w ciągi zbieżne do zera w normie przestrzeni.*

Dowód.

($\Rightarrow$) Załóżmy, że ciąg elementów x_n przestrzeni $\mathcal{H}$ dąży słabo do zera.

Ten ciąg jest więc ograniczony. Zatem Tx_n zawiera podciąg zbieżny Tx_{n_k}. Oznaczmy $Tx_{n_k} \underset{k}{\to} y$. Dla $z \in \mathcal{H}$ otrzymujemy

$$\langle y, z\rangle = \lim_k \langle Tx_{n_k}, z\rangle = \lim_k \langle x_{n_k}, T^* z\rangle = 0.$$

Zatem $\langle y, z\rangle = 0$ dla wszystkich $z \in \mathcal{H}$, czyli $y = 0$.
Z powyższego rozumowania wynika, że każdy podciąg ciągu Tx_n zawiera podciąg zbieżny do zera. Zatem ciąg Tx_n dąży do zera.

($\Leftarrow$) Niech x_n będzie ograniczonym ciągiem elementów z $\mathcal{H}$. Z twierdzenia Banacha-Alaoglu możemy wybrać podciąg x_{n_k}, który jest $*$-słabo, czyli słabo, zbieżny. Niech $x_{n_k} \underset{k}{\to} x$ słabo. Zatem $x_{n_k} - x \underset{k}{\to} 0$ słabo. Z założenia ciąg $T(x_{n_k} - x)$ jest zbieżny do zera w normie. Czyli $\|Tx_{n_k} - Tx\| \underset{k}{\to} 0$. □

Lemat 4.12. *Niech X, Y i Z będą przestrzeniami unormowanymi. Załóżmy, że operator $T : X \to Y$ jest zwarty oraz, że ciąg ograniczonych operatorów $S_n : Y \to Z$ jest mocno zbieżny do operatora $S : Y \to Z$. Wtedy ciąg operatorów $S_n T$ jest zbieżny do ST w normie operatorowej.*

Dowód. Załóżmy, że $S_n T$ nie jest zbieżny do ST w normie operatorowej. Zatem dla pewnej dodatniej liczby ε można znaleźć rosnący ciąg liczb naturalnych n_k oraz ciąg elementów $x_k \in X$ takich, że

$$\|x_k\| = 1, \quad \|(S_{n_k} T - ST)x_k\| \geqslant \varepsilon.$$

Ze zwartości operatora T ciąg Tx_k zawiera podciąg zbieżny. Bez straty ogólności założymy, że Tx_k jest zbieżny do pewnego elementu $y \in Y$. Wtedy

$$\begin{aligned} \varepsilon \leqslant \|(S_{n_k} T - ST)x_k\| &\leqslant \|S_{n_k} Tx_k - S_{n_k} y\| + \|S_{n_k} y - Sy\| + \|Sy - STx_k\| \\ &\leqslant \|S_{n_k}\|\,\|Tx_k - y\| + \|S_{n_k} y - Sy\| + \|S\|\,\|y - Tx_k\| \underset{k}{\to} 0. \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 4.13. *Każdy zwarty operator pomiędzy przestrzeniami Hilberta jest granicą w normie operatorowej ciągu operatorów skończenie wymiarowych.*

Dowód. Niech $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ będzie zwarty. Rozważmy przestrzeń $T(\mathcal{H}_1)$. Oznaczmy symbolem B kulę jednostkową w $\mathcal{H}_1$. Wtedy

$$T(\mathcal{H}_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nB) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(B) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T(B)}.$$

Zatem przestrzeń $T(\mathcal{H}_1)$ jest zawarta w przeliczalnej sumie zbiorów zwartych. Z kursu topologii metrycznej wiemy, że przestrzeń $T(\mathcal{H}_1)$ jest więc ośrodkowa. Zatem również domknięcie $\mathcal{H}_3 := \overline{T(\mathcal{H}_1)} \subset \mathcal{H}_2$ jest ośrodkową przestrzenią Hilberta. Możemy zastąpić $\mathcal{H}_2$ przez $\mathcal{H}_3$. Niech $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ oznacza bazę ortonormalną w przestrzeni $\mathcal{H}_3$. Wtedy dla dowolnego elementu $x \in \mathcal{H}_3$ mamy

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Oznaczmy

$$I_n x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \qquad I_n : \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_3.$$

Wtedy $I_n x \xrightarrow{n} x$, dla $x \in \mathcal{H}_3$, czyli $I_n \xrightarrow{n} I_{\mathcal{H}_3}$ mocno. Z Lematu 4.12 wynika, że $I_n T \xrightarrow{n} I_{\mathcal{H}_3} T = T$ w normie operatorowej. □

Uwaga 4.14. Na podstawie twierdzenie można uzyskać inny dowód Twierdzenia 4.33. Rzeczywiście, jeśli $T_n \to T$ oraz operatory T_n są skończenie wymiarowe, to $T_n^* \to T^*$ oraz T_n^* są skończenie wymiarowe.

Twierdzenie 4.15 (Alternatywa Fredholma)**.** *Niech T będzie operatorem zwartym w przestrzeni Hilberta. Wtedy dla liczby $\lambda \neq 0$ operator $\lambda I - T$ jest odwracalny albo liczba λ jest wartością własną operatora T.*

Dowód. [b] Mamy $\lambda I - T = \lambda(I - \lambda^{-1}T)$. Zamieniając operator T na $\lambda^{-1}T$, który też jest zwarty możemy ograniczyć się do przypadku $\lambda = 1$. Rozważamy więc operator $I - T$. Z poprzedniego lematu można znaleźć operator skończenie wymiarowy K_0 taki, że $\|T - K_0\| < 1$. Wtedy

$$I - T = I - (T - K_0) - K_0.$$

Operator $I - (T - K_0)$ jest odwracalny na podstawie Twierdzenia 1.7. Zatem

$$I - T = \left\{ I - K_0[I - (T - K_0)]^{-1} \right\} [I - (T - K_0)].$$

Oznaczmy

$$K_1 = K_0[I - (T - K_0)]^{-1}.$$

Wtedy

$$I - T = (I - K_1)(I - T + K_0). \tag{4.2}$$

[b] Dowód opracowany z Dominikiem Wachowskim

Operator K_1 jest skończenie wymiarowy, bo $\operatorname{Im} K_1 \subseteq \operatorname{Im} K_0$. Ze wzoru (4.2) wynika, że $I - T$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $I - K_1$ jest odwracalny. Ponadto $I - T$ jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy $I - K_1$ jest różnowartościowy.

Pokażemy, że jeśli $I - K_1$ jest różnowartościowy, to $I - K_1$ jest odwracalny. Stąd będzie wynikać, że jeśli $I - T$ jest różnowartościowy, to $I - T$ jest odwracalny.

Zauważmy, że $x \perp \operatorname{Im} K_1 + \operatorname{Im} K_1^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \ker K_1 \cap \ker K_1^*$. Przestrzeń $\operatorname{Im} K_1 + \operatorname{Im} K_1^*$ ma skończony wymiar, zatem jest domknięta. Stąd

$$\mathcal{H} = [\operatorname{Im} K_1 + \operatorname{Im} K_1^*] \oplus [\ker K_1 \cap \ker K_1^*].$$

Obie podprzestrzenie są niezmiennicze na działanie operatora K_1, czyli również dla operatora $I - K_1$. Operator $I - K_1$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $I - K_1$ jest odwracalny na każdej z dwu podprzestrzeni (zadanie). Operator $I - K_1$ jest identycznością na drugim składniku sumy prostej.

Załóżmy, że $I - K_1$ jest różnowartościowy. Zatem $I - K_1$ jest różnowartościowy na $\operatorname{Im} K_1 + \operatorname{Im} K_1^*$. Z kursu algebry liniowej wiemy, że operator $I - K_1$ jest wtedy odwracalny na $\operatorname{Im} K_1 + \operatorname{Im} K_1^*$, bo przestrzeń ta ma skończony wymiar.

□

Twierdzenie 4.16 (Riesz-Schauder)**.** *Spektrum operatora zwartego na przestrzeni Hilberta składa się z co najwyżej przeliczalnego zbioru liczb zespolonych nie mających punktu skupienia poza być może punktem* 0*. Każda niezerowa liczba w spektrum jest wartością własną o skończonej krotności (tzn. przestrzeń wektorów własnych odpowiadająca tej liczbie ma skończony wymiar).*

Dowód. Niech $\lambda \neq 0$ oraz $\lambda \in \sigma(T)$ dla zwartego operatora T. Z alternatywy Fredholma wynika, że λ jest wartością własną operatora T. Niech $Tx = \lambda x$, oraz $x \neq 0$. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Pokażemy, że przestrzeń wektorów własnych odpowiadających wartościom własnym λ, $|\lambda| \geqslant \varepsilon$, ma skończony wymiar. To zakończy dowód tezy twierdzenia.

Załóżmy nie wprost, że istnieje nieskończony układ liniowo niezależny $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $Tx_n = \lambda_n x_n$ oraz $|\lambda_n| \geqslant \varepsilon$. Zastosujemy proces ortogonalizacji Grama-Schmidta do tego ciągu i otrzymamy układ ortonormalny $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ o własności

$$y_n \in E_n := \operatorname{lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad y_n \perp E_{n-1}.$$

Niech
$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} x_k, \qquad \alpha_{n,n} > 0.$$
Wtedy
$$\begin{aligned} Ty_n &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} Tx_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n}\lambda_k x_k \\ &= \lambda_n \alpha_{n,n} x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k,n}\lambda_k x_k = \lambda_n y_n - \lambda_n \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k,n} x_k + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k,n}\lambda_k x_k. \end{aligned}$$
Tzn.
$$Ty_n = \lambda_n y_n + v_n, \quad v_n \in E_{n-1}.$$
Zatem
$$\langle Ty_n, y_n\rangle = \lambda_n \langle y_n, y_n\rangle = \lambda_n.$$
Ciąg y_n dąży słabo do zera co wynika z nierówności Bessela. Zatem
$$\|Ty_n\| \underset{n}{\to} 0.$$
Stąd $\lambda_n \underset{n}{\to} 0$, na podstawie Twierdzenia 4.11. □

Lemat 4.17. *Jeśli T jest zwartym operatorem liniowym na przestrzeni Hilberta, to obraz* $\mathrm{Im}\,(I-T)$ *jest domkniętą podprzestrzenią liniową.*

Dowód. Wystarczy udowodnić nierówność $\|(I-T)x\| \geqslant c\|x\|$ dla pewnej stałej $c>0$ oraz wszystkich $x \perp \ker(I-T)$. Rzeczywiście, dla
$$\mathcal{H}_0 = \ker(I-T)^{\perp}$$
rozważmy operator $I - T : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}$. Zauważmy, że
$$(I-T)(\mathcal{H}) = (I-T)(\mathcal{H}_0).$$
Wtedy z nierówności $\|(I-T)x\| \geqslant c\|x\|$ dla $x \in \mathcal{H}_0$ wynika, że $I-T$ jest operatorem różnowartościowym na $\mathcal{H}_0$ i jego obraz jest domknięty.

Załóżmy nie wprost, że nierówność nie jest spełniona dla żadnej stałej $c>0$. Zatem istnieje ciąg elementów $x_n \perp \ker(I-T)$ spełniający $\|x_n\| = 1$ oraz $\|(I-T)x_n\| \underset{n}{\to} 0$. Z ciągu Tx_n można wybrać podciąg zbieżny Tx_{n_k}. Niech $Tx_{n_k} \underset{k}{\to} y$. Wtedy $\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| \underset{k}{\to} 0$. Zatem $x_{n_k} \underset{k}{\to} y$. Stąd
$$(I-T)y = \lim_k (I-T)x_{n_k} = 0,$$

czyli $y \in \ker(I - T)$. Z drugiej strony ponieważ $x_{n_k} \underset{k}{\to} y$, to $y \in \ker(I - T)^{\perp}$. Zatem $y = 0$. Ale $\|y\| = \lim_k \|x_{n_k}\| = 1$. □

Uwaga 4.18. Jeśli operator T jest zwarty, to również $\mathrm{Im}\,(\lambda I - T)$ dla $\lambda \neq 0$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową, bo

$$\mathrm{Im}\,(\lambda I - T) = \mathrm{Im}\,(I - \lambda^{-1} T).$$

Twierdzenie 4.19. *Niech T będzie zwartym operatorem liniowym w $B(\mathcal{H})$. Równanie $(I - T)x = y$ ma rozwiązanie $x \in \mathcal{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y \perp \ker(I - T^*)$.*

Dowód. Mamy rozkład ortogonalny

$$\mathcal{H} = \ker(I - T^*) \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(I - T)} = \ker(I - T^*) \oplus \mathrm{Im}\,(I - T).$$

Zatem $y \in \mathrm{Im}\,(I - T)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y \perp \ker(I - T^*)$. □

Twierdzenie 4.20. *Niech $T \in B(\mathcal{H})$ będzie zwartym operatorem samosprzężonym w ośrodkowej przestrzeni Hilberta. Wtedy istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych operatora T. Tzn. istnieje baza ortonormalna $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ taka, że $T\varphi_n = \mu_n \varphi_n$, gdzie $\mu_n \in \mathbb{R}$ oraz $\mu_n \underset{n}{\to} 0$. (gdy $\dim \mathcal{H} = \infty$, to $N = \infty$)*

Dowód. Przeprowadzimy dowód w przypadku $\dim \mathcal{H} = \infty$. Operator T nie jest odwracalny, bo dla ciągu ortonormalnego e_n mamy $e_n \underset{\text{słabo}}{\to} 0$, zatem $\|Te_n\| \underset{n}{\to} 0$. Czyli $0 \in \sigma(T)$. Wiemy, że $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Ponadto

$$\sigma(T) = \{\mu_n\}_{n=1}^N \cup \{0\},$$

gdzie $\mu_n \neq 0$. Przestrzeń własna

$$E_n = \{x \in \mathcal{H} \,:\, Tx = \mu_n x\}$$

ma skończony wymiar. Wiemy też, że jeśli $T^* = T$, to wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne. Niech $E_0 = \ker T$. Oznaczmy

$$\mathcal{H}_0 = \bigoplus_{n=1}^N E_n \oplus E_0.$$

Tzn. $\mathcal{H}_0$ jest najmniejszą domkniętą podprzestrzenią zawierającą podprzestrzenie E_n dla $n = 0, 1, 2, \ldots, N$. Pokażemy, że $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$. Załóżmy nie wprost, że $\mathcal{H}_0 \subsetneq \mathcal{H}$. Zauważmy, że $T(\mathcal{H}_0) \subset \mathcal{H}_0$, bo $T(E_n) \subset E_n$ dla każdego $n = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Lemat 4.21. *Niech $T \in B(\mathcal{H})$ oraz $T^* = T$. Jeśli dla pewnego podzbioru $M \subset \mathcal{H}$ mamy $T(M) \subset M$, to $T\left(M^{\perp}\right) \subset M^{\perp}$.*

Dowód. Niech $x \in M^{\perp}$. Dla $y \in M$ mamy $Ty \in M$, więc

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0.$$

To oznacza, że $Tx \in M^{\perp}$. $\square$

Z lematu mamy $T\left(\mathcal{H}_0^{\perp}\right) \subset \mathcal{H}_0^{\perp}$. Niech $\widetilde{T}$ oznacza operator T ograniczony do podprzestrzeni niezmienniczej $\mathcal{H}_0^{\perp}$. Operator $\widetilde{T}$ jest nadal samosprzężony. $\widetilde{T}$ nie posiada wartości własnych, bo wszystkie wektory własne zostały uwzględnione w $\mathcal{H}_0$. Operator ten jest też zwarty. Zatem $\sigma(\widetilde{T}) = \{0\}$. Tzn. promień spektralny $r(\widetilde{T})$ jest zerowy. Ale z samosprzężoności mamy

$$\|\widetilde{T}\| = r(\widetilde{T}) = 0.$$

Czyli $\widetilde{T} = 0$. Otrzymujemy sprzeczność za wyjątkiem sytuacji $\mathcal{H}_0^{\perp} = \{0\}$. Zatem

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{N} E_n \oplus E_0.$$

Wiemy, że $\dim E_n < \infty$. W każdej podprzestrzeni E_n wybieramy bazę ortonormalną. Połączenie tych zbiorów da nam bazę ortonormalną całej przestrzeni $\mathcal{H}$. Ustawmy elementy bazy w ciąg $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Wtedy $T\varphi_n = \mu_n\varphi_n$, dla pewnych liczb $\mu_n \in \sigma(T)$. Ponieważ elementy φ_n dążą słabo do zera, to $\mu_n \underset{n}{\to} 0$. $\square$

Uwaga 4.22. Dla $x \in \mathcal{H}$ mamy

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n.$$

Zatem

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \varphi_n\rangle T\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n.$$

Twierdzenie 4.23. *Dla operatora zwartego $T \in B(\mathcal{H})$ istnieją układy ortonormalne $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$, $\{\psi_n\}_{n=1}^{N}$ oraz liczby dodatnie $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N}$ takie, że*

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, \varphi_n\rangle \psi_n.$$

Dowód. Stosujemy rozkład polarny $T = U|T|$. Wartości własne operatora $|T|$ są nieujemne. Rzeczywiście, jeśli $A \geqslant 0$ oraz $Ax = \lambda x$, dla $x \neq 0$, to

$$0 \leqslant \langle Ax, x\rangle = \lambda\|x\|^2.$$

Zatem $\lambda \geqslant 0$. Z poprzedniego twierdzenia istnieje baza ortonormalna $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ taka, że

$$|T|x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n.$$

Zatem

$$Tx = U|T|x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, \varphi_n\rangle U\varphi_n = \sum_{\substack{n=1\\ \mu_n\neq 0}}^{\infty} \mu_n \langle x, \varphi_n\rangle U\varphi_n.$$

Dla $\mu_n \neq 0$ oznaczmy $U\varphi_n = \psi_n$. Mamy $|T|\varphi_n = \mu_n\varphi_n$. Stąd $\varphi_n \in \operatorname{Im}|T|$. Wiemy, że U jest izometrią na $\operatorname{Im}|T|$. Zatem

$$\langle \psi_n, \psi_m\rangle = \langle U\varphi_n, U\varphi_m\rangle = \langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

Stąd układ $\{\psi_n\}_{n=1,\mu_n\neq 0}^{\infty}$ jest ortonormalny. Niezerowe liczby μ_n ustawiamy w ciąg $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N}$, aby uzyskać tezę twierdzenia. □

Uwaga 4.24. Gdy $N = \infty$, to $\lambda_n \underset{n}{\to} 0$.

Definicja 4.25. *Wielkości λ_n nazywamy liczbami singularnymi operatora zwartego T. Możemy założyć, że $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \ldots$.*

Twierdzenie 4.26 (Zasada minimaksu)**.** *Dla operatora zwartego T w przestrzeni Hilberta n-ta liczba singularna wyraża się wzorem*

$$\lambda_n = \min_{\substack{V<\mathcal{H}\\ \dim V = n-1}} \max_{\substack{x\in V^\perp\\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

Dowód. Niech

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, \varphi_n\rangle \psi_n, \quad \lambda_n \searrow 0.$$

Oznaczmy $V_n = \operatorname{lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}\}$. Wtedy element $x \in V_n^\perp$ ma postać

$$x = \sum_{k=n}^{N} \langle x, \varphi_k\rangle \varphi_k + x_0, \quad \text{gdzie } x_0 \in \ker T = \ker|T|.$$

Zatem
$$Tx = \sum_{k=n}^{N} \lambda_k \langle x, \varphi_k\rangle \psi_k.$$
Z nierówności Bessela otrzymujemy
$$\|Tx\|^2 = \sum_{k=n}^{N} \lambda_k^2 |\langle x, \varphi_k\rangle|^2 \leqslant \lambda_n^2 \sum_{k=n}^{N} |\langle x, \varphi_k\rangle|^2 \leqslant \lambda_n^2 \|x\|^2.$$
W rezultacie
$$\|Tx\| \leqslant \lambda_n \|x\| \leqslant \lambda_n, \quad \text{dla } \|x\| \leqslant 1.$$
To daje nierówność „$\geqslant$" we wzorze tezy twierdzenia.

Dla dowodu przeciwnej nierówności niech $V < \mathcal{H}$ będzie podprzestrzenią wymiaru $n-1$. Wtedy istnieje wektor $x \in V_{n+1}$ taki, że $x \perp V$ oraz $\|x\| = 1$ (por. zadanie 33) Dalej
$$Tx = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \langle x, \varphi_k\rangle \psi_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, \varphi_k\rangle \psi_k.$$
Zatem
$$\|Tx\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 |\langle x, \varphi_k\rangle|^2 \geqslant \lambda_n^2 \sum_{k=1}^{n} |\langle x, \varphi_k\rangle|^2 = \lambda_n^2 \|x\|^2 = \lambda_n^2.$$
Stąd $\max\limits_{\substack{x\in V^\perp\\ \|x\|=1}} \|Tx\| \geqslant \lambda_n$. Biorąc kres dolny względem V otrzymujemy
$$\min_{\substack{V<\mathcal{H}\\ \dim V = n-1}} \max_{\substack{x\in V^\perp\\ \|x\|=1}} \|Tx\| \geqslant \lambda_n.$$
□

Uwaga 4.27. Prawdziwy jest też inny wzór
$$\lambda_n = \max_{\substack{V<\mathcal{H}\\ \dim V = n}} \min_{\substack{x\in V\\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$
Rzeczywiście, niech $V = V_{n+1}$. Wtedy dla $x \in V$ mamy
$$Tx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, \varphi_k\rangle \psi_k.$$

Zatem
$$\|Tx\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 |\langle x, \varphi_k\rangle|^2 \geqslant \lambda_n^2 \|x\|^2.$$
Stąd
$$\min_{\substack{x\in V_{n+1}\\ \|x\|=1}} \|Tx\| = \lambda_n,$$
bo dla $x = \varphi_n$ uzyskujemy równość. To dowodzi nierówności " $\leqslant$ ".

Niech $\dim(V) = n$. Na podstawie zadania 33 istnieje wektor $x \in V$ taki, że $x \perp V_n$ oraz $\|x\| = 1$. Wtedy
$$Tx = \sum_{k=n}^{N} \lambda_k \langle x, \varphi_k\rangle \psi_k.$$
Dalej
$$\|Tx\|^2 = \sum_{k=n}^{N} \lambda_k^2 |\langle x, \varphi_k\rangle|^2 \leqslant \lambda_n^2 \|x\|^2 = \lambda_n^2.$$
Stąd
$$\min_{\substack{x\in V\\ \|x\|=1}} \|Tx\| \leqslant \lambda_n,$$
czyli
$$\lambda_n \geqslant \max_{\substack{V<\mathcal{H}\\ \dim V=n}} \min_{\substack{x\in V\\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

Wniosek 4.28. *Jeśli T jest operatorem zwartym, to $\|T\| = \|Tx_0\|$ dla pewnego elementu $x_0 \in \mathcal{H}$ takiego, że $\|x_0\| = 1$.*

Dowód. Istotnie, z zasady minimaksu wynika, że
$$\lambda_1 = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \|T\|.$$
Liczba λ_1 jest największą wartością własną operatora $|T|$. Niech $x_0 \in \mathcal{H}$ będzie odpowiadającym jednostkowym wektorem własnym. Wtedy
$$\|Tx_0\| = \||T|x_0\| = \lambda_1 \|x_0\| = \lambda_1 = \|T\|.$$
$\square$

Uwaga 4.29. Wniosek można udowodnić bezpośrednio. Mamy $\|T\| = \lim_n \|Tx_n\|$ dla pewnego ciągu wektorów spełniających $\|x_n\| = 1$. Na podstawie Twierdzenia Banacha-Alaoglu z ciągu x_n można wybrać podciąg słabo zbieżny. Niech $x_n \underset{s}{\to} x_0$. Wtedy $\|x_0\| \leqslant 1$. Ponadto $x_n - x_0 \underset{s}{\to} 0$. Zatem $Tx_n - Tx_0 \to 0$ w normie przestrzeni $\mathcal{H}$. To oznacza, że $\|Tx_0\| = \lim_n \|Tx_n\| = \|T\|$. Ponieważ $\|T\| = \|Tx_0\| \leqslant \|T\|\|x_0\|$, to $\|x_0\| \geqslant 1$. Czyli $\|x_0\| = 1$.

Definicja 4.30. *Operator $T \in B(\mathcal{H})$ nazywamy operatorem Hilberta-Schmidta jeśli dla pewnej bazy ortonormalnej $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ mamy $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$. Klasę tych operatorów oznaczamy symbolem HS.*

Przykład 4.31. Niech $T : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ będzie odwzorowaniem liniowym z macierzą $a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle$, gdzie $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ oznacza standardową bazę w przestrzeni $\mathbb{C}^N$. Wtedy

$$\sum_{j=1}^{N} \|Te_j\|^2 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} |\langle Te_j, e_i \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}|^2,$$

tzn. otrzymujemy sumę kwadratów wartości bezwzględnych wszystkich wyrazów macierzy.

Przykład 4.32. *Rozważmy odwzorowanie liniowe $T : \ell^2 \to \ell^2$. Oznaczmy $a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle$, gdzie $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ oznacza standardową bazę w przestrzeni ℓ^2. Wtedy*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|Te_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\langle Te_j, e_i \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2.$$

Twierdzenie 4.33. *Wielkość $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$ nie zależy od wyboru bazy ortonormalnej. Ponadto jeśli $T \in HS$, to $T^* \in HS$.*

Dowód. Niech $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ będzie dowolną bazą ortonormalną przestrzeni $\mathcal{H}$. Wtedy z równości Parsevala mamy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle Te_n, f_m \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle e_n, T^* f_m \rangle|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|T^* f_m\|^2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Podstawiając $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T^* e_n\|^2. \tag{4.4}$$

Dalej stosujemy (4.3) i (4.4) do operatora T^*, aby uzyskać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T^* e_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|(T^*)^* f_m\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|Tf_m\|^2.$$

□

Twierdzenie 4.34. *Każdy operator Hilberta-Schmidta jest zwarty. Ponadto liczby singularne operatora Hilberta-Schmidta są sumowalne z kwadratem.*

Dowód. Możemy założyć, że operator T jest nieskończenie wymiarowy, bo teza jest w oczywisty sposób spełniona dla operatora skończenie wymiarowego. Ustalmy bazę ortonormalną $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dla operatora $T \in HS$ rozważmy operatory

$$T_N x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle T e_n = T\left(\sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n \right).$$

Tzn. $T_N = TP_N$, gdzie P_N jest rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń $\operatorname{lin}\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$. Operator T_N jest skończenie wymiarowy, więc jest zwarty. Mamy

$$Tx = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle T e_n.$$

Zatem z nierówności Schwarza mamy

$$\begin{aligned} \|Tx - T_N x\|^2 &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle T e_n \right\|^2 \leqslant \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle| \, \|Te_n\| \right)^2 \\ &\leqslant \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \right) \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right) \leqslant \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Stąd

$$\|T - T_N\| \leqslant \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zatem T jest zwarty jako granica w normie operatorowej operatorów skończenie wymiarowych.

Wiemy, że

$$|T|x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n,$$

gdzie $\lambda_n \searrow 0$ oraz $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest bazą ortonormalną obrazu operatora $|T|$. Niech $\{f_k\}_{k=1}^{K}$ będzie bazą ortonormalną dla $\ker |T| = \ker T$. Wtedy układ $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{f_k\}_{k=1}^{K}$ jest bazą ortonormalną całej przestrzeni $\mathcal{H}$. Ponadto

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \|T\varphi_n\|^2 + \sum_{k=1}^{K} \|Tf_k\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2.$$

□

Twierdzenie 4.35. *Operatory Hilberta-Schmidta tworzą ideał.*

Dowód. Niech $T, S \in HS$. Dla bazy ortonormalnej $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ na podstawie nierówności trójkąta w ℓ^2 mamy

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|(T+S)e_n\|^2\right)^{1/2} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n + Se_n\|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\|Te_n\| + \|Se_n\|)^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Se_n\|^2\right)^{1/2} < \infty.\end{aligned}$$

Czyli $T + S \in HS$. Niech $T \in HS$ oraz $S \in B(\mathcal{H})$. Wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|STe_n\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|S\|^2 \|Te_n\|^2 = \|S\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty,$$

co oznacza $ST \in HS$. Z Twierdzenia **??** mamy $T^* \in HS$. Zatem $S^*T^* \in HS$. Znowu z Twierdzenia **??** otrzymujemy $TS = (S^*T^*)^* \in HS$. □

Uwaga 4.36. Operatory HS z normą

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2\right)^{1/2}$$

tworzą unormowaną przestrzeń liniową, w której norma pochodzi od iloczynu skalarnego

$$\langle T, S \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, Se_n \rangle.$$

Można udowodnić, że przestrzeń HS jest zupełna, czyli jest przestrzenią Hilberta.

5 Operatory unitarne

Operator $U \in B(\mathcal{H})$ nazywamy unitarnym, jeśli $UU^* = U^*U = I$, tzn. $U^* = U^{-1}$. Mamy $\|U\|^2 = \|U^*U\| = \|I\| = 1$. Zatem $\sigma(U) \subseteq \{z : |z| \leqslant 1\}$. Ale dla $|z| < 1$ mamy

$$zI - U = zUU^* - U = -U(I - zU^*).$$

To oznacza, że operator $zI - U$ jest odwracalny. Ostatecznie otrzymujemy

$$\sigma(U) \subseteq \{z : |z| = 1\} = \mathbb{T}.$$

Definicja 5.1. *Wielomianem trygonometrycznym nazywamy wyrażenie postaci*

$$p(z) = \sum_{k=-m}^{n} a_k z^k,$$

gdzie $a_k \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{T}$. Wielomian sprzężony $\overline{p}(z)$ określamy wzorem

$$\overline{p}(z) = \overline{p(z)} = \sum_{k=-m}^{n} \overline{a_k} z^{-k}$$

(`Uwaga`: $\overline{z} = z^{-1}$ dla $z \in \mathbb{T}$).

Dla operatora unitarnego U oraz wielomianu trygonometrycznego $p(z)$ określamy

$$p(U) = \sum_{k=-m}^{n} a_k z^k, \quad \text{gdzie } U^0 = I.$$

Lemat 5.2.

(i) $(p + q)(U) = p(U) + q(U)$.

(ii) $p(U)^* = \overline{p}(U)$.

(iii) $(pq)(U) = p(U)q(U)$.

(iv) *$p(U)$ jest operatorem normalnym.*

Dowód.
(ii) Mamy $p(U)^* = \sum_{k=-m}^{n} \overline{a_k} U^{-k} = \overline{p}(U)$.
(iii) Niech $q(U) = \sum_{l=-m'}^{n'} b_l z^l$. Wtedy

$$(pq)(U) = \left(\sum_{k=-m}^{n} \sum_{k=-m'}^{n'} a_k b_l z^{k+l} \right)(U) = \sum_{k=-m}^{n} \sum_{k=-m'}^{n'} a_k b_l U^{k+l} = p(U)q(U).$$

Ponieważ $p(z)q(z) = q(z)p(z)$, to $p(U)q(U) = q(U)p(U)$.
(iv) Mamy

$$p(U)p(U)^* = p(U)\overline{p}(U) = |p|^2(U) = \overline{p}(U)p(U) = p(U)^*p(U).$$

□

Twierdzenie 5.3. *Mamy* $\sigma(p(U)) = p(\sigma(U))$.

Dowód. Załóżmy, że $\mu \in \sigma(p(U))$. Wtedy z zasadniczego twierdzenia algebry otrzymujemy

$$\mu I - p(z) = z^{-m}[z^m \mu - z^n p(z)] = cz^{-m}(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_N). \quad (5.1)$$

Zatem

$$\mu I - p(U) = cU^{-m}(U - \lambda_1 I)(U - \lambda_2 I) \dots (U - \lambda_N I).$$

Lewa strona jest operatorem nieodwracalnym. Zatem przynajmniej jeden z operatorów $U - \lambda_j I$ jest nieodwracalny. Wtedy $\lambda_j \in \sigma(U)$. W szczególności $\lambda_j \neq 0$. Podstawiając $z = \lambda_j$ w (5.1) otrzymamy $\mu = p(\lambda_j) \in p(\sigma(U))$. Udowodniliśmy więc zawieranie $\sigma(p(U)) \subseteq p(\sigma(U))$.

Niech teraz $\mu \in p(\sigma(U))$, tzn. $\mu = p(\lambda)$ dla pewnej liczby $\lambda \in \sigma(U)$. Wtedy

$$\begin{aligned} p(\lambda)I - p(U) &= \sum_{k=-m}^{n} a_k(\lambda^k I - U^k) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\lambda^k I - U^k) \\ &+ \sum_{k=1}^{m} a_{-k}\lambda^{-k}U^{-k}(U^k - \lambda^k I) = (\lambda I - U)V = V(\lambda I - U), \quad (5.2) \end{aligned}$$

dla pewnego operatora V. Pokażemy, że $p(\lambda) \in \sigma(p(U))$. Załóżmy nie wprost, że operator $p(\lambda)I - p(U)$ jest odwracalny. Niech A oznacza operator odwrotny do $p(\lambda)I - p(U)$. Wtedy z (5.2) otrzymamy

$$(\lambda I - U)VA = AV(\lambda I - U) = I,$$

co oznacza, że operator $\lambda I - U$ jest odwracalny, co przeczy założeniu $\lambda \in \sigma(U)$. W rezultacie udowodniliśmy, że $p(\sigma(U)) \subseteq \sigma(p(U))$. $\square$

Wniosek 5.4. $\|p(U)\| = \max\{|p(z)| \,:\, z \in \sigma(U)\} = \|p\|_{C(\sigma(U))}$.

Dowód. Ponieważ operator $p(U)$ jest normalny, to

$$\begin{aligned}\|p(U)\| &= \max\{|\mu| \,:\, \mu \in \sigma(p(U))\} \\ &= \max\{|\mu| \,:\, \mu \in p(\sigma(U))\} = \max\{|p(z)| \,:\, z \in \sigma(U)\}\end{aligned}$$

$\square$

Wniosek 5.5. *Jeśli* $p(z) \geqslant 0$ *dla* $z \in \mathbb{T}$, *to* $p(U) \geqslant 0$.

Dowód. Załóżmy, że $0 \leqslant p(z) \leqslant 1$. Określmy $q(z) = 2p(z) - 1$. Wtedy $q(z)$ jest wielomianem rzeczywistym oraz $|q(z)| \leqslant 1$. Z poprzedniego wniosku mamy $\|q(U)\| \leqslant 1$. Ponadto $q(U)^* = \overline{q}(U) = q(U)$, tzn. $q(U)$ jest operatorem samosprzężonym. Z Lematu 2.6 wynika, że $-I \leqslant q(U) \leqslant I$. W szczególności $2p(U) - I \geqslant -I$, czyli $p(U) \geqslant 0$. $\square$

Wniosek wynika też z następnego lematu.

Lemat 5.6 (Riesz-Fejér)**.** *Załóżmy, że wielomian trygonometryczny* $p(z)$ *jest nieujemny dla* $z \in \mathbb{T}$. *Wtedy istnieje wielomian trygonometryczny* $h(z)$ *taki, że* $p(z) = |h(z)|^2$.

Dowód. Najpierw rozpatrzymy przypadek, gdy $p(z) > 0$ dla $|z| = 1$. Niech $p(z) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k z^k$ Z dodatniości otrzymujemy

$$p(z) = \overline{p(z)} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} z^{-k} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_{-k}} z^k.$$

Zatem $c_k = \overline{c_{-k}}$ dla dowolnego wskaźnika k. Zauważmy, że stąd wynika $c_n \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c_{-n} \neq 0$.

Załóżmy, że $c_{-n} \neq 0$. Określmy $G(z) = z^n p(z)$. Wtedy $G(z)$ jest zwykłym wielomianem stopnia $2n$. Wielomian $G(z)$ nie zeruje się na okręgu $|z| = 1$. Pokażemy, że

$$G(z) = z^{2n}\overline{G\left(\overline{z}^{-1}\right)}, \quad \text{dla } z \neq 0,\ z \in \mathbb{C}. \tag{5.3}$$

Nietrudno zauważyć, że obie strony są wielomianami zmiennej z. Wystarczy zatem sprawdzić równość dla $|z| = 1$. Dla $|z| = 1$ mamy $p(z) = \overline{p(z)}$. Zatem $z^{-n}G(z) = \overline{z}^{-n}\overline{G(z)}$. Ponieważ $z = \overline{z}^{-1}$, to po przekształceniu otrzymujemy (5.3).

Rozkładamy wielomian $G(z)$ na czynniki liniowe

$$G(z) = c_n \prod_{j=1}^{r}(z - \alpha_j) \prod_{k=1}^{s}(z - \beta_k),$$

gdzie $|\alpha_j| < 1$ i $|\beta_k| > 1$, oraz $r + s = 2n$. Ze wzoru (5.3) wynika, że jeśli α jest pierwiastkiem wielomianu $G(z)$, to również $(\overline{\alpha})^{-1}$ jest pierwiastkiem i to tej samej krotności. To oznacza, że pierwiastki α_j i β_k można połączyć w pary, czyli

$$G(z) = c_n \prod_{j=1}^{n}(z - \alpha_j) \prod_{j=1}^{n}(z - (\overline{\alpha_j})^{-1}),$$

Zatem

$$\begin{aligned} p(z) = z^{-n}G(z) &= c_n \prod_{j=1}^{n}(z - \alpha_j) \prod_{j=1}^{n}(1 - (\overline{\alpha_j})^{-1}\overline{z}) \\ &= d_n \prod_{j=1}^{n}(z - \alpha_j) \prod_{j=1}^{n}(\overline{z} - \overline{\alpha_j}) = d_n \left| \prod_{j=1}^{n}(z - \alpha_j) \right|^2, \end{aligned}$$

gdzie

$$d_n = c_n(-1)^n \prod_{j=1}^{n}(\overline{\alpha_j})^{-1}.$$

W szczególności $d_n > 0$. Teza jest spełniona dla $h(z) = \sqrt{d_n}\prod_{j=1}^{n}(z - \alpha_j)$.

Załóżmy, że $p(z) \geqslant 0$ dla $|z| = 1$. Wtedy $p_N(z) = p(z) + \frac{1}{N} > 0$ dla $|z| = 1$. Z pierwszej części dowodu istnieją wielomiany $h_N(z)$, których stopień jest wspólnie ograniczony, takie, że $p_N(z) = |h_N(z)|^2$. Współczynniki wielomianów h_N są również wspólnie ograniczone, bo

$$|h_N(z)|^2 \leqslant |p(z)| + 1.$$

Zatem z ciągu $h_N(z)$ można wybrać zbieżny podciąg do wielomianu $h(z)$, który spełnia $p(z) = |h(z)|^2$ dla $|z| = 1$. $\square$

Powracamy do alternatywnego dowodu Wniosku 5.5 Mamy

$$p(U) = |h|^2(U) = (\overline{h}h)(U) = \overline{h}(U)h(U) = h(U)^*h(U) \geqslant 0.$$

Dotychczas potrafiliśmy określić $p(U)$, gdzie p jest wielomianem trygonometrycznym. Naszym celem jest zdefiniowanie $f(U)$, gdzie f jest funkcją ciągłą określoną na zbiorze $\sigma(U) \subset \mathbb{T}$. Z twierdzenia Tietzego funkcję f możemy rozszerzyć do funkcji ciągłej $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ tak, że

$$\max_{|z|=1} |F(z)| = \max_{z\in\sigma(U)} |f(z)|.$$

Z twierdzenia Weierstrassa można znaleźć ciąg wielomianów trygonometrycznych $p_n(z)$ zbieżny jednostajnie do funkcji $F(z)$ dla $|z| = 1$. Pokażemy, że

(1) Ciąg operatorów $p_n(U)$ jest zbieżny w normie operatorowej.

(2) Granica ciągu $p_n(U)$ nie zależy od wyboru wielomianów p_n.

(3) Granica ciągu $p_n(U)$ nie zależy od wyboru rozszerzenia F.

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} \|p_n(U) - p_m(U)\| &= \|(p_n - p_m)(U)\| \\ &= \max_{z\in\sigma(U)} |p_n(z) - p_m(z)| \leqslant \max_{|z|=1} |p_n(z) - p_m(z)| \\ &\leqslant \max_{|z|=1} |p_n(z) - F(z)| + \max_{|z|=1} |F(z) - p_m(z)| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Ciąg operatorów $p_n(U)$ spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem jest zbieżny. Załóżmy, że również inny ciąg wielomianów q_n jest zbieżny jednostajnie do F. Wtedy ciąg naprzemienny

$$p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_n, q_n, \ldots$$

jest też zbieżny jednostajnie do funkcji F. Z pierwszej części dowodu wynika, że ciąg operatorów

$$p_1(U), q_1(U), p_2(U), q_2(U), \ldots, p_n(U), q_n(U), \ldots$$

jest zbieżny. To oznacza, że ciągi $p_n(U)$ i $q_n(U)$ są zbieżne do tego samego operatora.

Oznaczmy symbolem $\widetilde{F}$ inne ciągłe rozszerzenie funkcji f do okręgu $|z| = 1$. Niech q_n będzie ciągiem wielomianów zbieżnym jednostajnie do $\widetilde{F}$ na okręgu $\mathbb{T}$. Z pierwszej części dowodu wiemy, że ciąg operatorów $q_n(U)$ jest zbieżny. Ponadto mamy

$$\begin{aligned}\|p_n(U) - q_n(U)\| &= \|(p_n - q_n)(U)\| = \max_{z\in\sigma(U)} |p_n(z) - q_n(z)| \\ &\leqslant \max_{z\in\sigma(U)} |p_n(z) - f(z)| + \max_{z\in\sigma(U)} |q_n(z) - f(z)| \\ &\leqslant \max_{|z|=1} |p_n(z) - F(z)| + \max_{|z|=1} |q_n(z) - \widetilde{F}(z)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

□

Wcześniejsze rozumowanie pokazuje, że granica $p_n(U)$ zależy jedynie od funkcji ciągłej f na spektrum operatora unitarnego U. Przyjmujemy oznaczenie

$$f(U) = \lim_n p_n(U).$$

Uwaga 5.7. Jeśli f jest wielomianem trygonometrycznym, np. $f(z) = z^k$, to $f(U) = U^k$.

Twierdzenie 5.8. *Niech $f, g \in C(\sigma(U))$. Wtedy*

(i) $(f + g)(U) = f(U) + g(U)$.

(ii) $(fg)(U) = f(U)g(U) = g(U)f(U)$.

(iii) $f(U)^* = \overline{f}(U)$.

(iv) $\|f(U)\| = \max_{z\in\sigma(U)} |f(z)|$.

(v) $\sigma(f(U)) = f(\sigma(U))$.

Uwaga 5.9. Twierdzenie mówi, że rodzina operatorów $\{f(U) : f \in C(\sigma(U))\}$ tworzy algebrę ze sprzężeniem i normą operatorową. Tę algebrę można utożsamić z algebrą $C(\sigma(U))$.

Dowód.

(i) Niech p_n i q_n będą jednostajnie zbieżnymi ciągami wielomianów trygonometrycznych na $\mathbb{T}$ takimi, że $p_n(z) \underset{n}{\to} f(z)$ oraz $q_n(z) \underset{n}{\to} g(z)$ dla $z \in \sigma(U)$. Wtedy

$$\begin{aligned} f(U) + g(U) = \lim_n p_n(U) + \lim_n q_n(U) &= \lim_n [p_n(U) + q_n(U)] \\ &= \lim_n (p_n + q_n)(U) = (f+g)(U), \end{aligned}$$

bo ciąg wielomianów $p_n + q_n$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{T}$ oraz $p_n(z) + q_n(z) \underset{n}{\to} f(z) + g(z)$ dla $z \in \sigma(U)$.

(ii) Przy oznaczeniach jak w (i) mamy

$$f(U)g(U) = \lim_n p_n(U) \lim_n q_n(U) = \lim_n p_n(U)q_n(U) = \lim_n (p_n q_n)(U) = (fg)(U),$$

bo ciąg wielomianów $p_n q_n$ jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{T}$ oraz $p_n(z)q_n(z) \underset{n}{\to} f(z)g(z)$ dla $z \in \sigma(U)$. Dalej $g(U)f(U) = (gf)(U) = (fg)(U) = f(U)g(U)$.

(iii) Jeśli p_n jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{T}$ oraz $p_n(z) \underset{n}{\to} f(z)$ dla $z \in \sigma(U)$, to ciąg $\overline{p_n}$ jest też zbieżny jednostajnie na $\mathbb{T}$ oraz $\overline{p_n}(z) \to \overline{f}(z)$ dla $z \in \sigma(U)$. Zatem z Lematu 5.2(ii) mamy

$$\overline{f}(U) = \lim_n \overline{p_n}(U) = \lim_n p_n(U)^* = f(U)^*.$$

(iv) Przy oznaczeniach jak w (i), na podstawie Wniosku 5.4 otrzymujemy

$$\|f(U)\| = \lim_n \|p_n(U)\| = \lim_n \max_{z \in \sigma(U)} |p_n(z)| = \max_{z \in \sigma(U)} |f(z)|.$$

(v) Niech $\mu \notin f(\sigma(U))$. Rozważmy funkcję $g(z) = [\mu - f(z)]^{-1}$. Mamy $g \in C(\sigma(U))$. Z własności (ii) otrzymujemy

$$g(U)(\mu - f)(U) = (\mu - f)(U)g(U) = [(\mu - f)g](U) = 1(U) = I.$$

To oznacza, że operator $(\mu - f)(U) = \mu I - f(U)$ jest odwracalny. Czyli $\mu \notin \sigma(f(U))$. Zatem $\sigma(f(U)) \subseteq f(\sigma(U))$. Niech teraz $\mu \in f(\sigma(U))$. Tzn. $\mu = f(\lambda)$ dla pewnej liczby $\lambda \in \sigma(U)$. Wybierzmy ciąg wielomianów trygonometrycznych p_n, jednostajnie zbieżny na $\mathbb{T}$, taki, że $p_n(z) \underset{n}{\to} f(z)$ dla $z \in \sigma(U)$. Wiemy, że operator $p_n(\lambda)I - p_n(U)$ nie jest odwracalny dla $\lambda \in \sigma(U)$ (por. Twierdzenie 5.3). Ale

$$p_n(\lambda)I - p_n(U) \underset{n}{\to} f(\lambda)I - f(U)$$

w normie operatorowej. Zbiór operatorów odwracalnych jest otwarty w $B(\mathcal{H})$, więc zbiór operatorów nieodwracalnych jest domknięty. Zatem operator $f(\lambda)I - f(U)$ nie jest odwracalny. To oznacza, że $\mu = f(\lambda) \in \sigma(f(U))$. Czyli $f(\sigma(U)) \subseteq \sigma(f(U))$. □

Twierdzenie 5.10. *Jeśli funkcja $f \in C(\sigma(U))$ jest nieujemna, to $f(U) \geqslant 0$.*

Dowód. Załóżmy, że $0 \leqslant f(z) \leqslant 2$ dla $z \in \sigma(U)$. Wtedy funkcja $g(z) = f(z) - 1$ spełnia $|g(z)| \leqslant 1$. Z Twierdzenia 5.8(iii), (iv) mamy $\|g(U)\| \leqslant 1$ oraz $g(U)^* = g(U)$. Zatem $-I \leqslant g(U) \leqslant I$. Wtedy

$$f(U) = g(U) + I \geqslant 0.$$

□

Naszym kolejnym celem jest określenie operatora $f(U)$ dla pewnych funkcji nieciągłych f określonych na $\sigma(U)$. Na przykład niech $f(z)$ przyjmuje wartość jeden na otwartym łuku okręgu jednostkowego oraz wartość zero w pozostałych punktach okręgu. Funkcję f można uzyskać jako granicę rosnącego ciągu funkcji nieujemnych i ciągłych $f_n \in C(\mathbb{T})$. Ta własność umożliwia określenie operatora $f(U)$.

Niech f_n będzie ciągiem nieujemnych funkcji ciągłych takim, że $f_n(z) \nearrow f(z)$ dla $z \in \sigma(U)$. Załóżmy, że funkcje $f_n(z)$ są wspólnie ograniczone na $\sigma(U)$, np. przez stałą $c > 0$. Mamy $0 \leqslant f_n(z) \leqslant f_{n+1}(z) \leqslant c$. Zatem $0 \leqslant f_n(U) \leqslant f_{n+1}(U) \leqslant cI$. Ciąg operatorów $f_n(U)$ jest wtedy rosnący i ograniczony. Zatem ciąg $f_n(U)$ jest mocno (punktowo) zbieżny. Oznaczmy mocną granicę symbolem A, tzn. niech

$$Av = \lim_N f_n(U)v, \quad v \in \mathcal{H}.$$

Mocna granica A zależy tylko od funkcji f, a nie od wyboru ciągu f_n. Rzeczywiście, niech $g_n \in C(\sigma(U))$ oraz $g_n(z) \nearrow f(z)$ dla $z \in \sigma(U)$. Mamy $g_n(z) \leqslant c$, bo $f(z) \leqslant c$ dla $z \in \sigma(U)$. Zatem ciąg operatorów $g_n(U)$ jest też mocno zbieżny na podstawie wcześniejszego rozumowania dla ciągu $f_n(U)$. Niech

$$Bv = \lim_n g_n(U)v, \quad v \in \mathcal{H}.$$

Chcemy pokazać, że $A = B$. Dla liczby naturalnej k określmy funkcje

$$h_n(z) = \min\{f_n(z), g_k(z)\}, \quad z \in \sigma(U).$$

Mamy $h_n \in C(\sigma(U))$. Ponadto

$$0 \leqslant h_n(z) \nearrow g_k(z), \quad z \in \sigma(U).$$

Ponieważ funkcja g_k jest ciągła na zbiorze $\sigma(U)$, to z twierdzenia Diniego wnioskujemy, że $h_n \rightrightarrows g_k$, gdy $n \to \infty$. Zatem $h_n(U) \underset{n}{\to} g_k(U)$ w normie operatorowej na podstawie Twierdzenia 5.8(iv). Dalej mamy $h_n(z) \leqslant f_n(z)$, więc $h_n(U) \leqslant f_n(U)$ z Twierdzenia 5.10. Przechodząc do mocnej granicy, gdy $n \to \infty$, otrzymujemy $g_k(U) \leqslant A$. Następnie przechodzimy do mocnej granicy, gdy $k \to \infty$, aby otrzymać $B \leqslant A$.

Uwaga 5.11. Skorzystaliśmy z faktu, że jeśli $0 \leqslant C_n \leqslant D_n$ oraz operatory C_n i D_n są słabo zbieżne do C i D odpowiednio, to $0 \leqslant C \leqslant D$. Rzeczywiście

$$\langle Dv, v\rangle - \langle Cv, v\rangle = \lim_n \langle D_n v, v\rangle - \lim_n \langle C_n v, v\rangle = \lim_n \langle (D_n - C_n)v, v\rangle \geqslant 0.$$

Twierdzenie 5.12. *Niech f i g będą ograniczonymi funkcjami określonymi na $\sigma(U)$ będącymi granicami punktowymi rosnących i nieujemnych funkcji ciągłych określonych na $\sigma(U)$. Wtedy*

(i) $(f+g)(U) = f(U) + g(U)$.

(ii) $(fg)(U) = f(U)g(U) = g(U)f(U)$.

(iii) $f(U) \geqslant 0$.

(iv) $\|f(U)\| = \sup\limits_{z \in \sigma(U)} f(z)$.

Dowód.
(i) Niech f_n i g_n będą ciągami nieujemnych funkcji ciągłych takimi, że $f_n(z) \nearrow f(z)$ i $g_n(z) \nearrow g(z)$ dla $z \in \sigma(U)$. Wtedy $f_n(z)+g_n(z) \nearrow f(z)+g(z)$. Zatem ciągi operatorów $f_n(U)$, $g_n(U)$ oraz $(f_n+g_n)(U)$ są zbieżne mocno do operatorów $f(U)$, $g(U)$ i $(f+g)(U)$, odpowiednio. Ponadto z Twierdzenia 5.8(i) mamy

$$\begin{aligned}(f+g)(U) = \lim_n (f_n+g_n)(U) &= \lim_n [f_n(U) + g_n(U)] \\ &= \lim_n f_n(U) + \lim_n g_n(U) = f(U) + g(U).\end{aligned}$$

(ii) Przy oznaczeniach z (i) mamy $f_n(z)g_n(z) \nearrow f(z)g(z)$. Zatem ciąg operatorów $(f_ng_n)(U)$ jest mocno zbieżny do $(fg)(U)$. Zatem z Twierdzenia 5.8(ii) otrzymujemy

$$(fg)(U) = \lim_n (f_ng_n)(U) = \lim_b f_n(U)g_n(U)$$
$$= \lim_n f_n(U) \lim_n g_n(U) = f(U)g(U).$$

(iii) Przy oznaczeniach z (i) mamy $f_n(U) \geqslant 0$, na podstawie Twierdzenia 5.10. Zatem $f(U) \geqslant 0$, jako mocna granica operatorów nieujemnych $f_n(U)$.

(iv) Oznaczmy $c = \sup\limits_{z\in\sigma(U)} f(z)$. Jeśli f_n jest ciągiem nieujemnych funkcji ciągłych na $\sigma(U)$ takim, że $f_n(z) \nearrow f(z)$ dla $z \in \sigma(U)$, to $0 \leqslant f_n(z) \leqslant c$ dla $z \in \sigma(U)$. Wtedy z Twierdzenia 5.8(iv) mamy $\|f_n(U)\| \leqslant c$. Stąd $\|f(U)\| \leqslant c$. Otrzymaliśmy $\|f(U)\| \leqslant \sup\limits_{z\in\sigma(U)} f(z)$.

Ponieważ $0 \leqslant f_n(U) \leqslant f(U)$, to $\|f_n(U)\| \leqslant \|f(U)\|$. Zatem z Twierdzenia 5.8(iv) mamy

$$\|f(U)\| \geqslant \sup_{z\in\sigma(U)} f_n(z), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zatem

$$\|f(U)\| \geqslant \sup_n \sup_{z\in\sigma(U)} f_n(z) = \sup_{z\in\sigma(U)} f(z).$$

□

6 Zadania

1. Pokazać, że jeśli operator liniowy T z przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y jest ograniczony, to T przekształca ciągi słabo zbieżne do zera w X w ciągi słabo zbieżne do zera w Y. Pokazać, że implikacja odwrotna też jest prawdziwa. W dowodzie skorzystać z twierdzenia o wykresie domkniętym.

2. Określmy funkcjonały δ_n na przestrzeni ℓ^∞ wzorem

$$\delta_n(\{c_k\}_{k=1}^\infty) = c_n.$$

Pokazać, że $\{\delta_n\}$ nie zawiera podciągu zbieżnego $*$-słabo.

3. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest gęstym podzbiorem kuli jednostkowej w przestrzeni unormowanej X. W przestrzeni X^* wprowadzamy metrykę

$$d(x^*, y^*) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |x^*(x_n) - y^*(x_n)|$$

Pokazać, że $d(\cdot, \cdot)$ jest istotnie metryką. Pokazać, że $*$-słaba topologia w kuli jednostkowej jest równoważna topologii wyznaczonej przez metrykę $d(\cdot, \cdot)$. * Czy topologie te są równoważne na całej przestrzeni X^* ?

4. Pokazać, że jeśli ciąg elementów x_n przestrzeni Hilberta jest słabo zbieżny do x oraz $\|x_n\| \to \|x\|$, to $\|x_n - x\| \to 0$. Czy można to uogólnić na przestrzenie ℓ^p dla $p > 1$?

5. $p > 1$. Pokazać, że ciąg x_n w przestrzeni ℓ^p jest słabo zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $\|x_n\|_p$ są wspólnie ograniczone oraz dla każdego m ciąg $x_n(m)$ jest zbieżny.

6. W przestrzeni ℓ^p, $p > 1$ znaleźć ciąg słabo zbieżny , ale nie zbieżny w normie przestrzeni. * Pokazać, że w ℓ^1 każdy ciąg słabo zbieżny jest też zbieżny w normie.

7. Ciąg $\{x_n\}$ elementów przestrzeni unormowanej X jest słabo zbieżny do x. Pokazać, że istnieje ciąg postaci $\{\sum_{i=1}^{m_n} \lambda_{i,n} x_i\}$ (gdzie $\lambda_{i,n} \in \mathbb{C}$) zbieżny do x w normie. `Wskazówka:` Rozważyć najmniejszą domkniętą podprzestrzeń liniową Y zawierającą $\{x_n\}$. Zauważyć, że teza zadania jest równoważna $x \in Y$. Skorzystać z faktu, że jeśli $x \notin Y$ to istnieje funkcjonał ograniczony x^* taki, że $x^*(x) = 1$ oraz $x^*(y) = 0$ dla $y \in Y$.

8. Pokazać, że jeśli ciąg x_n jest słabo zbieżny do x, to $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$.

9. Pokazać, że ciąg funkcji f_n jest słabo zbieżny do f w $L^p(0,1)$ jeśli normy $\|f_n\|_p$ są wspólnie ograniczone oraz f_n jest zbieżny do f według miary, tzn.

$$\lim_n |\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}| = 0,$$

dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Pokazać, że odwrotna implikacja jest fałszywa.

10. Funkcja rzeczywista f na $[0,1]$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α, jeśli istnieje stała C taka, że $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$. Określmy

$$\|f\|_\alpha = \max |f(x)| + \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Pokazać, że dla $0 < \alpha \leqslant 1$, zbiór funkcji spełniających $\|f\|_\alpha \leqslant 1$ jest zwartym podzbiorem w $C[0,1]$.

11. Funkcje g_n są ciągłe na $[0,1]$. Czy z ciągu funkcji

$$f_n(x) = \int_0^1 \sqrt{1+x-y}\,\sin\{g_n(y^2)\}\,dy$$

można wybrać podciąg zbieżny ?

12. Niech $K(x,y)$ będzie funkcją ciągłą na $\mathbb{R}^2$ taką, że

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |K(x,y)|^2 dx\,dy < \infty.$$

Niech $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Rozważmy równanie całkowe

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)u(y)dy,$$

gdzie λ jest liczbą zespoloną. Pokazać, że równanie ma jednoznaczne rozwiązanie $u(x) \in L^2(\mathbb{R})$, jeśli λ ma odpowiednio małą wartość bezwzględną. `Wskazówka:` Do operatora

$$Tu(x) = f(x) + \lambda \int K(x,y)u(y)\,dy$$

na $L^2(\mathbb{R})$ zastosować twierdzenie o odwzorowaniach zwężających.

13. Podprzestrzeń Y przestrzeni unormowanej X nazywamy niezmienniczą dla operatora liniowego $T : X \to X$ jeśli $T(Y) \subset Y$. Podać przykłady podprzestrzeni niezmienniczych operatora przesunięcia S określonego na ℓ^2 wzorem

$$S(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots).$$

14. Dla $X = C[0,1]$ i $g \in X$ określamy operator $T : X \to X$ wzorem $Tf = gf$ (mnożenie punktowe przez funkcję g). Pokazać, że operator T jest ograniczony. Znaleźć $\sigma(T)$.

15. Rozwiązać poprzednie zadanie w przypadku, gdy $X = L^2(0,1)$ oraz $g \in C[0,1]$.

16. Operator $T : \ell^2 \to \ell^2$ jest określony wzorem

$$(Tx)_n = \lambda_n x_n,$$

gdzie λ_n jest ustalonym ciągiem ograniczonym. Znaleźć $\sigma(T)$ oraz $\sigma_p(T)$.

17. Korzystając z poprzedniego zadania pokazać, że istnieje operator $T : \ell^2 \to \ell^2$, którego spektrum jest z góry zadanym zwartym podzbiorem $K \subset \mathbb{C}$.

18. Niech $T \in B(X)$. Pokazać, że $\|R_\lambda(T)\| \to 0$, gdy $|\lambda| \to \infty$.

19. Niech $T : \ell^p \to \ell^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, będzie określony wzorem

$$T(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3 \ldots).$$

Znaleźć spektrum T.

20. Dla $T \in B(\mathcal{H})$ pokazać, że $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.

21. T jest ograniczonym operatorem na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Pokazać, że

    (a) T jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy. gdy obraz T^* jest gęsty;

    (b) T^* jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy. gdy obraz T jest gęsty;

    (c) Jeśli T jest "na", to istnieje operator ograniczony $S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ taki, że $TS = I$. Czy operator S jest jedyny ? Pokazać, że istnieje operator $S_{\min}$ taki, że $TS_{\min} = I$ oraz $\|S_{\min}v\| \leqslant \|Sv\|$, $v \in \mathcal{H}$, dla każdego ograniczonego operatora S spełniającego $TS = I$.

    (d) T ma domknięty obraz wtedy i tylko wtedy T^* ma domknięty obraz.

22. Dla $T, S \in B(X)$ oraz $\lambda \in \varrho(S) \cap \varrho(T)$ wyprowadzić wzór

$$R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(S)(T - S)R_\lambda(T).$$

23. Obliczyć normę operatora T określonego wzorem

$$Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy$$

w przestrzeni $L^2(0,1)$. Znaleźć operator sprzężony. Pokazać, że istnieje ciąg funkcji $f_n \in L^2$ taki, że $f_n \to 0$ słabo, ale $\|Tf_n\|_2$ nie dąży do 0. `Wskazówka.` Zauważyć, że

$$Tf(x) = \int_0^1 f(xy)dy.$$

Skorzystać z nierówności

$$\left(\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)dy\right)^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)^2 dx\right)^{1/2} dy.$$

Zbadać jak zachowuje się iloraz $\|f\|_2^{-1}\|Tf\|_2$ dla $f(x) = x^a$, gdy $a \to -1/2^+$.

24. T jest operatorem na $L^2(0,+\infty)$ określonym przez

$$Tf(x) = \int_0^\infty e^{-xy} f(y)dy.$$

Dowieść, że T jest ograniczonym operatorem na L^2 i znaleźć jego normę. Obliczyć T^* i pokazać, że operator TT^* zadany jest wzorem

$$(TT^*f)(x) = \int_0^{+\infty} f(y)(x+y)^{-1}dy.$$

`Wskazówka.` Zauważyć, że

$$Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-y} f(\frac{y}{x})dy.$$

Skorzystać z nierówności

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty g(x,y)dy\right)^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \int_0^\infty \left(\int_0^\infty g(x,y)^2 dx\right)^{1/2} dy.$$

Zbadać zachowanie się ilorazu $\|f\|_2^{-1}\|Tf\|_2$ dla $f(x) = x^{-1/2+\delta}e^{-\varepsilon x}$, gdy $\delta, \varepsilon \to 0^+$.

25. T jest operatorem na $L^2(0,1)$ takim, że $\dim \operatorname{Im} T < +\infty$. Pokazać, że istnieje funkcja $K(x,y)$ z $L^2((0,1)\times(0,1))$ taka, że

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

`Wskazówka.` Niech $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ oraz będzie bazą ortonormalną dla $\operatorname{Im} T^*$. Pokazać, że

$$K(x,y) = \sum_{i=0}^{n} (T\varphi_i)(x)\varphi_i(y).$$

26. Pokazać, że jeśli A nie jest samosprzężony na $\mathcal{H}$, to równość

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle Ax, x\rangle|$$

nie musi zachodzić.

27. Operator T jest określony na $L^2(0,1)$ wzorem

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y)dy.$$

Znaleźć jawny wzór całkowy dla operatorów $(zI - T)^{-1}$, gdzie $z \neq 0$. Skorzystać z faktu, że $(zI-T)^{-1} = \sum_0^\infty z^{-(n+1)}T^n$ i ze wzoru całkowego na T^n podanego na wykładzie. Znaleźć wzór dla operatora sprzężonego T^*.

28. Ograniczony operator T na przestrzeni Banacha X spełnia warunek $p(T) = 0$, dla pewnego wielomianu $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$. Pokazać, że spektrum operatora T jest zawarte w zbiorze pierwiastków wielomianu $p(z)$.

29. Dla funkcji zespolonej $k(x,y)$ dwu zmiennych na $[0,1]\times[0,1]$ określamy operator całkowy na $L^2(0,1)$ wzorem

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)\,dy.$$

Znaleźć wzór dla K^*.

30. Ograniczony operator P na przestrzeni Banacha X nazywamy rzutem jeśli $P^2 = P$. Pokazać, że ImP jest domknięty. Znaleźć spektrum dla P. Znaleźć wzór na operatory rezolwenty $(zI - P)^{-1}$.

31. Rzut P na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ nazywamy ortogonalnym jeśli $Px \perp x - Px$ dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$. Pokazać, że następujące trzy warunki są równoważne:
    (a) P jest ortogonalny.
    (b) $\|P\| \leqslant 1$.
    (c) $P^* = P$.

32. P i Q są rzutami ortogonalnymi w przestrzeni Hilberta takimi, że $PQ = QP$. Pokazać, że każdy z operatorów $I - P$, $I - Q$, PQ, $P + Q - PQ$ i $P + Q - 2PQ$ jest rzutem ortogonalnym. Opisać obrazy tych rzutów za pomocą podprzestrzeni $M = \mathrm{Im}P$ i $N = \mathrm{Im}Q$.

33. Podprzestrzenie V i W w przestrzeni Hilberta mają skończony wymiar oraz $\dim(W) < \dim(V)$. Pokazać, że podprzestrzeń V posiada niezerowy wektor v ortogonalny do W.

34. Dla ograniczonego ciągu liczb zespolonych $\{\lambda_n\}$ określamy operator T na przestrzeni ℓ^2 wzorem
$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \ldots).$$
Znaleźć T^* oraz $(zI - T)^{-1}$.

35. Dla ograniczonej zespolonej funkcji ciągłej $g(x)$ na prostej określamy operator T na $L^2(\mathbb{R})$ wzorem $(Tf)(x) = g(x)f(x)$. Znaleźć spektrum operatora T i jego normę. Pokazać, że T jest operatorem normalnym. Przy jakich warunkach T jest samosprzężony ?

36. Pokazać, że jeśli T jest operatorem normalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, to T jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\|Tv\| \geqslant c\|v\|, \quad v \in \mathcal{H},$$
dla pewnej stałej $c > 0$.

37. Pokazać, że jeśli liczba z leży w spektrum operatora normalnego T, to liczba $|z|^2$ leży w spektrum operatora T^*T.

38. Niech $p(x, y)$ będzie wielomianem dwu zmiennych. Pokazać, że jeśli liczba z leży w spektrum operatora normalnego T, to liczba $p(z, \overline{z})$ leży w spektrum operatora $p(T, T^*)$.

39. U jest ograniczonym i odwracalnym odwzorowaniem liniowym z przestrzeni Banacha X na przestrzeń Banacha Y. T i S są operatorami ograniczonymi na przestrzeni X i Y odpowiednio, spełniającymi związek $S = UTU^{-1}$. Pokazać, że spektra operatorów S i T są równe.

40. Dla funkcji ciągłej $g(x)$ o okresie 2π określmy operator T na przestrzeni $L^2(0, 2\pi)$ wzorem

$$Tf(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy.$$

Pokazać, że T jest operatorem ograniczonym i $\|T\| \leqslant (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |g(x)|dx$. * Znaleźć spektrum operatora T. `Wskazówka:` Rozważyć odwzorowanie $U : L^2(0, 2\pi) \to \ell^2(\mathbb{Z})$

$$(Uf)(n) = \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Pokazać, że $(UTf)(n) = \widehat{g}(n)\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)(Uf)(n)$. Wywnioskować, że UTU^{-1} jest operatorem mnożenia przez ciąg $\{\widehat{g}(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ określonym na $\ell^2(\mathbb{Z})$. Skorzystać z zadań 7 i 9.

41. Niech T będzie operatorem samosprzężonym w przestrzeni Hilberta. Pokazać, że:

    (a) $\|T\| \leqslant 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma(T) \subset [-1, 1]$.

    (b) $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy T jest operatorem dodatnim.

`Wskazówka:` W (a) skorzystać z faktu, że $r(T) = \|T\|$. W (b) można założyć, że $\|T\| \leqslant 1$. Wtedy $\sigma(T) \subset [0, 1]$. Zatem $\sigma(2T - I) \subset [-1, 1]$. Z (a) mamy, że $\|I - 2T\| \leqslant 1$. To pociąga $\langle x - 2Tx, x\rangle \leqslant \langle x, x\rangle$, dla $x \in \mathcal{H}$.

42. Dla operatora samosprzężonego T określamy

$$m = \inf\{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\} \qquad M = \sup\{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}.$$

Pokazać, że $\sigma(T) \subset [m, M]$ oraz $m.M \in \sigma(T)$. `Wskazówka:` Zauważyć, że operatory $T - mI$ oraz $MI - T$ są dodatnie.

43. Udowodnić, że jeśli ciąg $A_n \in B(\mathcal{H})$ jest słabo zbieżny, to również ciąg A_n^* jest słabo zbieżny. Pokazać, że stwierdzenie nie jest prawdziwe dla mocnej zbieżności.

44. (a) Niech $A_n, A \in B(\mathcal{H})$. Pokazać, że jeśli $A_n \geqslant 0$ oraz A_n jest zbieżny do A w normie operatorowej, to $A \geqslant 0$ oraz $\sqrt{A_n} \to \sqrt{A}$ w normie operatorowej.

    (b) Pokazać, że jeśli $A_n \geqslant 0$ oraz $A_n \to A$ mocno, to również $\sqrt{A_n} \to \sqrt{A}$ mocno.

    (c) Pokazać, że jeśli $A_n \to A$ w normie operatorowej, to $|A_n| \to |A|$ w normie operatorowej.

    (d) Pokazać, że jeśli $A_n \to A$ oraz $A_n^* \to A^*$ mocno, to również $|A_n| \to |A|$ mocno.

    (e) Pokazać na przykładzie, że poprzednie stwierdzenie nie jest prawdziwe dla słabej zbieżności operatorowej.

45. (a) Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha. Pokazać, że jeśli dla $T_n \in B(X,Y)$ oraz $\{T_n x\}$ jest ciągiem Cauchy'ego dla każdego $x \in X$, to istnieje $T \in B(X,Y)$ taki, że $T_n \to T$ mocno.

    (b) Czy poprzednie stwierdzenie jest prawdziwe dla ciągów uogólnionych T_α ?

46. Niech $T_t : f(x) \mapsto f(x+t)$ będzie operatorem na $L^2(\mathbb{R})$. Znaleźć normę T_t. Do czego są zbieżne operatory T_t, gdy $t \to \infty$, i w jaki sposób ? Odpowiedzieć na te same pytania dla $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}\,dx)$.

47. Niech $\mathcal{H}$ będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta.

    (a) Pokazać, że jeśli $A_n, B_n \in B(\mathcal{H})$ są mocno zbieżne do A i B odpowiednio to $A_n B_n$ jest mocno zbieżny do AB.

    (b) Pokazać na przykładzie, że jeśli $A_n, B_n \in B(\mathcal{H})$ są słabo zbieżne do A i B odpowiednio to $A_n B_n$ nie musi być słabo zbieżny do AB.

48. Niech T będzie operatorem określonym na ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$, wzorem

$$(Tx)_n = \lambda_n x_n, \quad x \in \ell^p.$$

    Pokazać, że T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_n \xrightarrow{n} 0$.

49. Dla funkcji g ciągłej na $[0,1]$ określamy operator $T : L^p(0,1) \to L^p(0,1)$ przez $(Tf)(x) = g(x)f(x)$. Pokazać, że T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $g = 0$.

50. Niech $K(x,y)$ będzie funkcją całkowalną z kwadratem na $[0,1] \times [0,1]$. Pokazać, że operator T określony na $L^2(0,1)$ wzorem
$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy$$
jest ograniczony i zwarty. `Wskazówka:` Wskazać bazę ortonormalną w $L^2([0,1] \times [0,1])$ i rozwinąć $K(x,y)$ względem tej bazy.

51. Pokazać, że jeśli $T : X \to Y$ jest zwartym operatorem liniowym pomiędzy przestrzeniami Banacha X i Y, to T nie może być "na" chyba, że przestrzeń Y ma skończony wymiar.

52. Pokazać, że rodzina zwartych operatorów liniowych z przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y tworzy domkniętą podprzestrzeń liniową w $B(X,Y)$.

53. T jest zwartym operatorem z przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y. Pokazać, że jeśli obraz operatora zwartego $T(X)$ jest przestrzenią nieskończonego wymiaru, to obraz ten nie jest domknięty w Y.

54. Pokazać, że obraz operatora zwartego $T : X \to Y$ jest przestrzenią ośrodkową. `Wskazówka:` W zupełnej przestrzeni metrycznej podzbiór jest warunkowo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowicie ograniczony.

55. W przestrzeni ℓ^2 określamy operator T wzorem
$$(Tx)(n) = \begin{cases} 0, & \text{dla } n = 0, \\ \frac{1}{n}\, x_{n-1}, & \text{dla } n \geqslant 1. \end{cases}$$
Pokazać, że T jest zwarty. Obliczyć $\|T^n\|$ oraz promień spektralny.

56. Niech a_i, b_i będą elementami przestrzeni $L^2(0,1)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Niech $K(x,y) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(y)$. Określmy operator T na $L^2(0,1)$ wzorem
$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy.$$

Niech $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Pokazać, że dla dowolnej ustalonej funkcji $g \in L^2(0,1)$ równanie $Tf - \lambda f = g$ ma jednoznaczne rozwiązanie $f \in L^2(0,1)$, albo dla niektórych g równanie ma nieskończenie rozwiązań, a dla pozostałych g, nie ma ich wcale.

57. Niech
$$K(x,y) = \begin{cases} (1-x)y & \text{dla } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1, \\ (1-y)x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$
Określamy operator T na $L^2(0,1)$ wzorem
$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy.$$
Pokazać, że wartościami własnymi T są liczby $(n\pi)^{-2}$, $n = 1, 2, \ldots$, przy czym odpowiadająca popdprzestrzeń własna jest jednowymiarowa. `Wskazówka:` Pokazać, że jeśli funkcja f spełnia $Tf = \lambda f$ dla $\lambda \neq 0$, to f jest klasy C^∞ i spełnia równanie $\lambda f'' + f = 0$ z warunkami $f(0) = f(1) = 0$. Przypadek $\lambda = 0$ rozpatrzyć oddzielnie. Zbadać rozwiązalność względem f równania $Tf - \lambda f = g$ dla $g(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n \sin \pi x$.

∗58. Niech A, B będą operatorami ograniczonymi na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ oraz $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} B$. Pokazać, że jeśli B jest zwarty, to A też jest zwarty.

59. Niech $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ będzie bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Pokazać, że operator T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\lim_n \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1, x \perp e_1, e_2, \ldots, e_n\} = 0.$$

60. Pokazać, że jeśli T jest zwartym operatorem w przestrzeni Hilberta, to równanie $Tx = x$ ma niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $T^*x = x$ ma niezerowe rozwiązanie. Pokazać, że obie przestrzenie rozwiązań mają ten sam wymiar.

61. Niech T będzie zwartym operatorem na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Pokazać, że dla dowolnej niezerowej wartości własnej λ operatora T każda z podprzestrzeni $\ker(\lambda I - T)^n$ ma skończony wymiar, oraz wymiary te są wspólnie ograniczone przez liczbę zależną tylko od λ.

62. Operator $A \geqslant 0$ jest zwarty. Pokazać, że $A^{1/2}$ też jest zwarty. Pokazać, że jeśli $0 \leqslant B \leqslant A$, to również B jest zwarty.

63. $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest bazą ortonormalną w $\mathcal{H}$. Dla operatora dodatniego $A \in B(\mathcal{H})$ określamy ślad wzorem

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A\varphi_n, \varphi_n \rangle.$$

Pokazać, że $\mathrm{tr}\, A$ nie zależy od wyboru bazy ortonormalnej. Udowodnić, że

(a) $\mathrm{tr\,(A+B) = tr\,A + tr\,B}$.

(b) $\mathrm{tr\,(\lambda A) = \lambda tr\,A}, \quad \lambda \geqslant 0$.

(c) $\mathrm{tr\,(UAU^{-1} = tr\,A}$ dla dowolnego operatora unitarnego U.

(d) Jeśli $0 \leqslant A \leqslant B$, to $\mathrm{tr\,A \leqslant tr\,B}$.

64. Operator $A \in B(\mathcal{H})$ nazywamy operatorem śladowym jeśli $\mathrm{tr\,|A|} < \infty$. Rodzinę operatorów śladowych oznaczamy symbolem C_1. Pokazać, że

(a) Jeśli $A \in C_1$, to $\lambda A \in C_1$.

(b) Jeśli $A \in C_1$, to $A^* \in C_1$.

(c) Jeśli $A \in C_1$ i $B \in B(\mathcal{H})$, to $AB \in C_1$ oraz $BA \in C_1$. `Wskazówka:` Wykorzystać zasadę minimaksu.

(d) Jeśli $A, B \in C_1$, to $A + B \in C_1$. `Wskazówka:` Użyć rozkładu polarnego dla operatorów A, B i $A + B$.

65. Pokazać, że każdy operator śladowy jest zwarty. Wykazać, że operator zwarty A jest śladowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum \lambda_n < \infty$, gdzie λ_n jest ciągiem liczb singularnych operatora A.

66. Pokazać, że funkcja $\|A\|_1 = tr|A|$ jest normą na C_1. Pokazać, że C_1 z normą $\|\cdot\|_1$ jest przestrzenią Banacha.

67. Niech C_2 oznacza rodzinę operatorów Hilberta-Schmidta. Pokazać, że jeśli $A, B \in C_2$, to $AB \in C_1$. Pokazać, że każdy operator śladowy jest iloczynem dwu operatorów Hilberta-Schmidta.

68. Pokazać, że dla $A \in C_1$ i dowolnej bazy ortonormalnej $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \langle A\varphi_n, \varphi_n \rangle$ jest zbieżny i jego suma nie zależy od wyboru bazy. Określmy $\mathrm{tr}\,\mathrm{A} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \langle \mathrm{A}\varphi_{\mathrm{n}}, \varphi_{\mathrm{n}} \rangle$. Pokazać, że $\mathrm{tr}\,\mathrm{AB} = \mathrm{tr}\,\mathrm{BA}$, gdzie $A \in C_1$ i $B \in B(\mathcal{H})$ lub $A, B \in C_2$.

69. Pokazać, że jeśli $A \in C_1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle A\varphi_n, \varphi_n \rangle| < \infty$ dla dowolnej bazy ortonormalnej. Czy prawdziwa jest implikacja odwrotna ? Pokazać, że jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} \|A\varphi_n\|$ dla pewnej bazy ortonormalnej, to $A \in C_1$.

∗70. P i Q są rzutami ortogonalnymi w przestrzeni Hilberta takimi, że $P - Q$ jest operatorem śladowym. Pokazać, że $\mathrm{tr}\,(\mathrm{P} - \mathrm{Q})$ jest liczbą całkowitą. `Wskazówka:` P i Q są przemienne z $(P - Q)^2$.

Literatura

[1] N. I. Akhiezer, I. M. Glazman, *Teoriia lineinykh operatorov v gilbertovom prostranstve I*, Kharkov, Vyshcha shkola, 1977-78 (ros.); *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, New York, Dover, 1993 (ang.).

[2] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators, Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space, Part 2*, New York, Wiley, 1988.

[3] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications,* New York, Wiley 1989.

[4] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics: Functional Analysis,* New York, Academic Press 1972.

[5] R. Szwarc, *Analiza funkcjonalna I*, http://www.math.uni.wroc.pl/∼szwarc/pdf/anfun2007/analiza-funkcjonalna1.pdf.