1a. Zadania z analizy funkcjonalnej

1. Udowodnić nierówność Höldera

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,$$

gdzie $a, b \geqslant 0$, $p, q > 1$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wyznaczyć, kiedy zachodzi równość. `Wskazówka:`
(Sposób I) Naszkicować wykres funkcji $y = x^{p-1}$. Porównać pole prostokąta $[0, a] \times [0, b]$ z sumą pól dwu obszarów: (1) ograniczonego wykresem funkcji, osią OX, i prostą $x = a$, (2) ograniczonego wykresem funkcji, osią OY i prostą $y = b$. (Sposób II) Przyjąć $y = 1$ i pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{p}x^p - x + \frac{1}{q}$ przyjmuje minimum w punkcie $x = 1$.

2. Pokazać nierówność Höldera

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q},$$

gdzie $x_i, y_i \geqslant 0$, p, q jak poprzednio. Kiedy zachodzi równość ? `Wskazówka:` Założyć, że obie sumy $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p$ i $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q$ nie przekraczają 1. Zastosować poprzednie zadanie do każdego z iloczynów $x_i y_i$.

3. Pokazać, że

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = \max\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}\right| \;:\; \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q} \leqslant 1\right\},$$

gdzie $x_i, y_i \in \mathbb{C}$, p i q jak poprzednio.

4. Pokazać nierówność trójkąta dla normy

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

określonej na $\mathbb{C}^n$. `Wskazówka:` Skorzystać z poprzedniego zadania.

5. Uogólnić trzy poprzednie zadania na sumy nieskończone.

6. Dla $p_2 \geqslant p_1 \geqslant 1$ i $n \in \mathbb{N}$ znaleźć najlepsze stałe w nierównościach

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_1}\right)^{1/p_1} \leqslant c_1 \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_2}\right)^{1/p_2}, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_2}\right)^{1/p_2} \leqslant c_2 \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_1}\right)^{1/p_1}.$$

7. Pokazać, że $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$, jeśli $p_1 \leqslant p_2$. `Wskazówka:` Jeśli $\|x\|_{p_1} \leqslant 1$, to $|x_n| \leqslant 1$ dla wszystkich n.

8. Skonstruować ciąg $x \in \ell^2$ taki, że $x \notin \ell^p$ dla każdego $p < 2$.

9. Pokazać całkową nierówność Höldera

$$\int_\Omega f(x)g(x)\, d\mu(x) \leqslant \left(\int_\Omega f(x)^p\, d\mu(x)\right)^{1/p} \left(\int_\Omega g(x)^q\, d\mu(x)\right)^{1/q},$$

dla nieujemnych funkcji $f(x)$ i $g(x)$, p i q jak w zadaniu 1.

10. Pokazać nierówność trójkąta dla normy

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p},$$

gdzie f jest zespoloną funkcją na Ω i $p \geqslant 1$. `Wskazówka:` Wyprowadzić wzór analogiczny do wzoru z zadania 3.

11. Ze zbióru Górniaka i Pytlika rozwiązać zadania z rozdziału II.