10. Zadania z analizy funkcjonalnej

$*$1. Niech T będzie ograniczonym różnowartościowym operatorem liniowym z przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y. Pokazać, że istnieje stała $\varepsilon > 0$ taka, że dla $S \in B(X,Y)$ jeśli $\|T - S\| \leqslant \varepsilon$, to S jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy obraz $T(X)$ jest domkniętą podprzestrzenią w Y.

$*$2. Niech T będzie ograniczonym operatorem liniowym z przestrzeni Banacha X na przestrzeń Banacha Y. Pokazać, że istnieje stała $\varepsilon > 0$ taka, że dla $S \in B(X,Y)$ jeśli $\|T - S\| \leqslant \varepsilon$, to $S(X) = Y$. `Wskazówka:` Wyznaczyć ε z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym. Następnie dla $y \in Y$ skonstruować x tak, aby $Sx = y$ naśladując dowód twierdzenia o odwzorowaniu otwartym.

3. Niech $\mathcal{A}$ będzie samosprzężoną podalgebrą w $C(K)$ oraz a, b dwoma ustalonymi punktami w zwartej przestrzeni Hausdorffa K. Załóżmy, że $\mathcal{A}$ nie znika w K oraz rozdziela dowolne dwa punkty x_1 i x_2 z wyjątkiem a i b. Udowodnić, że każdą funkcję $f \in C(K)$ o własności $f(a) = f(b)$ można jednostajnie przybliżyć funkcjami z $\mathcal{A}$.

4. Pokazać, że dla każdej funkcji $f \in C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ istnieje ciąg wielomianów $p_n(x)$ taki, że

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |p_n(x) - f(x)| + \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |p_n'(x) - f'(x)| \xrightarrow{n} 0.$$

5. Czy każda funkcja z $C([0,1] \cup [2,3])$ jest jednostajną granicą wielomianów ?

6. Niech $\mathcal{A}$ oznacza rodzinę wielomianów $p(x)$ o własności $p''(0) = 0$. Czy każda funkcja z $C[0,1]$ jest jednostajną granicą elementów z $\mathcal{A}$?

7. Czy dla $\varepsilon > 0$ i funkcji $f \in C[0,1]$ można znaleźć wielomian $p(x)$ taki, że $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ oraz $p(2) = 5$, $p'(2) = 6$?

8. Rozważmy przestrzeń Hilberta $\mathcal{H} = L^2((0,1) \times (0,1))$. Pokazać, że jeśli funkcja $h(x,y) \in \mathcal{H}$ spełnia

$$\int_0^1 \int_0^1 h(x,y) f(x) g(y)\, dx\, dy = 0, \qquad f, g \in L^2(0,1)$$

to $h(x,y) = 0$ prawie wszędzie.

9. Funkcja $f \in C[0,1]$ spełnia

$$\int_0^1 x^{10n} f(x)\, dx = 0, \qquad n \geqslant 10.$$

Pokazać, że $f = 0$.

10. Pokazać, że dla miary σ-skończonej μ na zbiorze X przestrzenią sprzężoną do $L^1(X,\mu)$ jest $L^\infty(X,\mu)$. `Uwaga:` W przestrzeni $L^\infty(X,\mu)$ norma jest określona przez

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ \sup_{x \in X \setminus A} |f(x)| \;:\; A \subset X,\ \mu(A) = 0 \right\}.$$

11. Obliczyć normy funkcjonałów na przestrzeni $L^p(\mathbb{R}, \mu)$.

(a) $\varphi(f) = \int_0^1 f(x) dx, \qquad d\mu(x) = dx$

(b) $\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx, \quad d\mu(x) = e^{-x^2} dx.$

(c) $\varphi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) e^{-n}, \qquad \mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n.$

12. Które z funkcjonałów określonych na wielomianach rozszerzają się do ograniczonych funkcjonałów na $C[0,1]$?

(a) $\varphi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_0$,
(b) $\varphi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_1$,
(c) $\varphi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \ldots \frac{1}{n+1}a_n$,
(d) $\varphi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \ldots 2^na_n$.

13. Λ jest ciągłym funkcjonałem liniowym nad $\mathbb{C}$ na przestrzeni funkcji $C[0,1]$ o wartościach zespolonych. Λ nazywamy samosprzężonym jeśli $\Lambda(\bar{f}) = \overline{\Lambda(f)}$. Pokazać, że Λ jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy $\Lambda(f)$ przyjmuje wartości rzeczywiste dla rzeczywistych funkcji f. Pokazać, że każdy ograniczony funkcjonał Λ liniowy można rozłożyć na sumę $\Lambda = \Lambda_1 + i\Lambda_2$, gdzie Λ_1, Λ_2 są samosprzężone, oraz rozkład ten jest jedyny.

14. Funkcjonał Λ na rzeczywistej przestrzeni $C_{\mathbb{R}}(X)$, gdzie X jest zwartą przestrzenią topologiczną, nazywamy dodatnim jeśli $\Lambda(f) \geqslant 0$, dla każdej nieujemnej funkcji f. Pokazać, że $\|\Lambda\| = \Lambda(\mathbf{1})$, gdzie $\mathbf{1}$ oznacza funkcję stale równą 1. `Wskazówka.` Skorzystać z nierówności $-\|f\|_\infty \mathbf{1} \leqslant f \leqslant \|f\|_\infty \mathbf{1}$. Pokazać, że jeśli funkcjonał Λ spełnia $\|\Lambda\| = \Lambda(\mathbf{1})$, to Λ jest funkcjonałem dodatnim. `Wskazówka.` Jeśli $0 \leqslant f \leqslant 1$, to $\|2f - 1\| \leqslant 1$.

15. Załóżmy, że liczby m_n mają własność

$$\forall x \in [0,1] \ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \geqslant 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_n m_n \geqslant 0,$$

dla dowolnych n i $a_k \in \mathbb{R}$. Pokazać, że istnieje funkcja niemalejąca σ na przedziale $[0,1]$ taka, że

$$m_n = \int_0^1 x^n d\sigma(x).$$

`Wskazówka:` Określić funkcjonał φ na wielomianach wzorem

$$\varphi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_0m_0 + a_1m_1 + \ldots + a_nm_n.$$

Z założenia φ jest dodatni. Pokazać, że $|\varphi(p)| \leqslant m_0\|p\|_\infty$, gdzie p jest wielomianem. Pokazać, że φ rozszerza się jednoznacznie do ograniczonego funkcjonału Φ na $C_{\mathbb{R}}[0,1]$. Zauważyć, że Φ jest dodatni. Skorzystać z twierdzenia Riesza o postaci funkcjonałów na $C_{\mathbb{R}}[0,1]$.

16. Niech σ będzie funkcją niemalejącą na $[0,1]$. Dla $n \geqslant 0$ liczby $m_n = \int_0^1 x^n d\sigma(x)$ nazywamy momentami funkcji σ. Pokazać, że momenty są liczbami nieujemnymi oraz spełniają warunek

$$\Delta^N m_n \geqslant 0 \qquad \text{dla} \quad N \geqslant 1, n \geqslant 0,$$

gdzie $\Delta m_n = m_n - m_{n+1}$ i $\Delta^N = \Delta(\Delta^{N-1})$. `Wskazówka:` Obliczyć$\Delta^N x^n$ i zauważyć, że $\Delta^N\varphi(x^n) = \varphi(\Delta^N x^n)$, gdzie φ jest określone jak w zadaniu 15.

∗17. Ciąg liczb nieujemnych m_n, $n \geqslant 0$ nazywamy całkowicie monotonicznym jeśli

$$\Delta^N m_n \geqslant 0 \qquad \text{dla} \quad N \geqslant 1, n \geqslant 0.$$

Pokazać, że istnieje funkcja niemalejąca σ na $[0,1]$ taka, że $m_n = \int_0^1 x^n d\sigma(x)$. `Wskazówka:` Pokazać, że funkcjonał φ określony na wielomianach wzorem

$$\varphi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_0m_0 + a_1m_1 + \ldots + a_nm_n$$

jest dodatni. W tym celu udowodnić, że jeśli p jest wielomianem nieujemnym stopnia N, to wielomiany Bernsteina $B_n(p)$ są wielomianami stopnia N dla $n \geqslant N$. Ponadto z założenia $\varphi(B_n(p)) \geqslant 0$ oraz $\varphi(p) = \lim_n B_n(p)$.