11. Zadania z analizy funkcjonalnej

1. Pokazać, że jeśli operator liniowy T z przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y jest ograniczony, to T przekształca ciągi słabo zbieżne do zera w X w ciągi słabo zbieżne do zera w Y. Pokazać, że implikacja odwrotna też jest prawdziwa. W dowodzie skorzystać z twierdzenia o wykresie domkniętym.

2. Określmy funkcjonały δ_n na przestrzeni ℓ^∞ wzorem

$$\delta_n(\{c_k\}_{k=1}^{\infty}) = c_n.$$

Pokazać, że $\{\delta_n\}$ nie zawiera podciągu zbieżnego $*$-słabo.

3. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest gęstym podzbiorem kuli jednostkowej w przestrzeni unormowanej X. W przestrzeni X^* wprowadzamy metrykę

$$d(x^*, y^*) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |x^*(x_n) - y^*(x_n)|$$

Pokazać, że $d(\cdot,\cdot)$ jest istotnie metryką. Pokazać, że $*$-słaba topologia w kuli jednostkowej jest równoważna topologii wyznaczonej przez metrykę $d(\cdot,\cdot)$. * Czy topologie te są równoważne na całej przestrzeni X^* ?

4. Pokazać, że jeśli ciąg elementów x_n przestrzeni Hilberta jest słabo zbieżny do x oraz $\|x_n\| \to \|x\|$, to $\|x_n - x\| \to 0$. Czy można to uogólnić na przestrzenie ℓ^p dla $p > 1$?

5. $p > 1$. Pokazać, że ciąg x_n w przestrzeni ℓ^p jest słabo zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $\|x_n\|_p$ są wspólnie ograniczone oraz dla każdego m ciąg $x_n(m)$ jest zbieżny.

6. W przestrzeni ℓ^p, $p > 1$ znaleźć ciąg słabo zbieżny , ale nie zbieżny w normie przestrzeni. * Pokazać, że w ℓ^1 każdy ciąg słabo zbieżny jest też zbieżny w normie.

7. Ciąg $\{x_n\}$ elementów przestrzeni unormowanej X jest słabo zbieżny do x. Pokazać, że istnieje ciąg postaci $\{\sum_{i=1}^{m_n} \lambda_{i,n} x_i\}$ (gdzie $\lambda_{i,n} \in \mathbb{C}$) zbieżny do x w normie. `Wskazówka:` Rozważyć najmniejszą domkniętą podprzestrzeń liniową Y zawierającą $\{x_n\}$. Zauważyć, że teza zadania jest równoważna $x \in Y$. Skorzystać z faktu, że jeśli $x \notin Y$ to istnieje funkcjonał ograniczony x^* taki, że $x^*(x) = 1$ oraz $x^*(y) = 0$ dla $y \in Y$.

8. Pokazać, że jeśli ciąg x_n jest słabo zbieżny do x, to $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$.

9. Pokazać, że ciąg funkcji f_n jest słabo zbieżny do f w $L^p(0,1)$ jeśli normy $\|f_n\|_p$ są wspólnie ograniczone oraz f_n jest zbieżny do f według miary, tzn.

$$\lim_n |\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}| = 0,$$

dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Pokazać, że odwrotna implikacja jest fałszywa.

10. Funkcja rzeczywista f na $[0,1]$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α, jeśli istnieje stała C taka, że $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha$. Określmy

$$\|f\|_\alpha = \max |f(x)| + \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Pokazać, że dla $0 < \alpha \leqslant 1$, zbiór funkcji spełniających $\|f\|_\alpha \leqslant 1$ jest zwartym podzbiorem w $C[0,1]$.

11. Funkcje g_n są ciągłe na $[0,1]$. Czy z ciągu funkcji

$$f_n(x) = \int_0^1 \sqrt{1+x-y}\,\sin\{g_n(y^2)\}\,dy$$

można wybrać podciąg zbieżny ?

12. Niech $K(x,y)$ będzie funkcją ciągłą na $\mathbb{R}^2$ taką, że

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |K(x,y)|^2 dx\,dy < \infty.$$

Niech $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Rozważmy równanie całkowe

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)u(y)dy,$$

gdzie λ jest liczbą zespoloną. Pokazać, że równanie ma jednoznaczne rozwiązanie $u(x) \in L^2(\mathbb{R})$, jeśli λ ma odpowiednio małą wartość bezwzględną. `Wskazówka:` Do operatora

$$Tu(x) = f(x) + \lambda \int K(x,y)u(y)\,dy$$

na $L^2(\mathbb{R})$ zastosować twierdzenie o odwzorowaniach zwężających.