12. Zadania z analizy funkcjonalnej

1. Podprzestrzeń Y przestrzeni unormowanej X nazywamy niezmienniczą dla operatora liniowego $T : X \to X$ jeśli $T(Y) \subset Y$. Podać przykłady podprzestrzeni niezmienniczych operatora przesunięcia S określonego na ℓ^2 wzorem

$$S(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots).$$

2. Dla $X = C[0,1]$ i $g \in X$ określamy operator $T : X \to X$ wzorem $Tf = gf$ (mnożenie punktowe przez funkcję g). Pokazać, że operator T jest ograniczony. Znaleźć $\sigma(T)$.

3. Rozwiązać poprzednie zadanie w przypadku, gdy $X = L^2(0,1)$ oraz $g \in C[0,1]$.

4. Operator $T : \ell^2 \to \ell^2$ jest określony wzorem

$$(Tx)_n = \lambda_n x_n,$$

gdzie λ_n jest ustalonym ciągiem ograniczonym. Znaleźć $\sigma(T)$ oraz $\sigma_p(T)$.

5. Korzystając z poprzedniego zadania pokazać, że istnieje operator $T : \ell^2 \to \ell^2$, którego spektrum jest z góry zadanym zwartym podzbiorem $K \subset \mathbb{C}$.

6. Niech $T \in B(X)$. Pokazać, że $\|R_\lambda(T)\| \to 0$, gdy $|\lambda| \to \infty$.

7. Niech $T : \ell^p \to \ell^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, będzie określony wzorem

$$T(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3 \ldots).$$

Znaleźć spektrum T.

8. Dla $T \in B(\mathcal{H})$ pokazać, że $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.

9. T jest ograniczonym operatorem na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Pokazać, że

(a) T jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy. gdy obraz T^* jest gęsty;

(b) T^* jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy. gdy obraz T jest gęsty;

(c) Jeśli T jest "na", to istnieje operator ograniczony $S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ taki, że $TS = I$. Czy operator S jest jedyny ? Pokazać, że istnieje operator $S_{\min}$ taki, że $TS_{\min} = I$ oraz $\|S_{\min}v\| \leqslant \|Sv\|$, $v \in \mathcal{H}$, dla każdego ograniczonego operatora S spełniającego $TS = I$.

(d) T ma domknięty obraz wtedy i tylko wtedy T^* ma domknięty obraz.

10. Dla $T, S \in B(X)$ oraz $\lambda \in \varrho(S) \cap \varrho(T)$ wyprowadzić wzór

$$R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(S)(T - S)R_\lambda(T).$$

11. Obliczyć normę operatora T określonego wzorem

$$Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy$$

w przestrzeni $L^2(0,1)$. Znaleźć operator sprzężony. Pokazać, że istnieje ciąg funkcji $f_n \in L^2$ taki, że $f_n \to 0$ słabo, ale $\|Tf_n\|_2$ nie dąży do 0. `Wskazówka.` Zauważyć, że

$$Tf(x) = \int_0^1 f(xy)dy.$$

Skorzystać z nierówności

$$\left(\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)dy\right)^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)^2 dx\right)^{1/2} dy.$$

Zbadać jak zachowuje się iloraz $\|f\|_2^{-1}\|Tf\|_2$ dla $f(x) = x^a$, gdy $a \to -1/2^+$.

12. T jest operatorem na $L^2(0,+\infty)$ określonym przez

$$Tf(x) = \int_0^\infty e^{-xy} f(y)dy.$$

Dowieść, że T jest ograniczonym operatorem na L^2 i znaleźć jego normę. Obliczyć T^* i pokazać, że operator TT^* zadany jest wzorem

$$(TT^*f)(x) = \int_0^{+\infty} f(y)(x+y)^{-1}dy.$$

`Wskazówka.` Zauważyć, że

$$Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-y} f(\frac{y}{x})dy.$$

Skorzystać z nierówności

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty g(x,y)dy\right)^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \int_0^\infty \left(\int_0^\infty g(x,y)^2 dx\right)^{1/2} dy.$$

Zbadać zachowanie się ilorazu $\|f\|_2^{-1}\|Tf\|_2$ dla $f(x) = x^{-1/2+\delta}e^{-\varepsilon x}$, gdy $\delta, \varepsilon \to 0^+$.

13. T jest operatorem na $L^2(0,1)$ takim, że $\dim \operatorname{Im} T < +\infty$. Pokazać, że istnieje funkcja $K(x,y)$ z $L^2((0,1)\times(0,1))$ taka, że

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

`Wskazówka.` Niech $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ oraz będzie bazą ortonormalną dla $\operatorname{Im} T^*$. Pokazać, że

$$K(x,y) = \sum_{i=0}^n (T\varphi_i)(x)\varphi_i(y).$$

14. Pokazać, że jeśli A nie jest samosprzężony na $\mathcal{H}$, to równość

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle Ax, x\rangle|$$

nie musi zachodzić.