13. Zadania z analizy funkcjonalnej

1. Operator T jest określony na $L^2(0,1)$ wzorem

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y)dy.$$

Znaleźć jawny wzór całkowy dla operatorów $(zI - T)^{-1}$, gdzie $z \neq 0$. Skorzystać z faktu, że $(zI - T)^{-1} = \sum_0^\infty z^{-(n+1)}T^n$ i ze wzoru całkowego na T^n podanego na wykładzie. Znaleźć wzór dla operatora sprzężonego T^*.

2. Ograniczony operator T na przestrzeni Banacha X spełnia warunek $p(T) = 0$, dla pewnego wielomianu $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$. Pokazać, że spektrum operatora T jest zawarte w zbiorze pierwiastków wielomianu $p(z)$.

3. Dla funkcji zespolonej $k(x,y)$ dwu zmiennych na $[0,1] \times [0,1]$ określamy operator całkowy na $L^2(0,1)$ wzorem

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)\,dy.$$

Znaleźć wzór dla K^*.

4. Ograniczony operator P na przestrzeni Banacha X nazywamy rzutem jeśli $P^2 = P$. Pokazać, że $\mathrm{Im}P$ jest domknięty. Znaleźć spektrum dla P. Znaleźć wzór na operatory rezolwenty $(zI - P)^{-1}$.

5. Rzut P na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ nazywamy ortogonalnym jeśli $Px \perp x - Px$ dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$. Pokazać, że następujące trzy warunki są równoważne:

(a) P jest ortogonalny.

(b) $\|P\| \leqslant 1$.

(c) $P^* = P$.

6. P i Q są rzutami ortogonalnymi w przestrzeni Hilberta takimi, że $PQ = QP$. Pokazać, że każdy z operatorów $I - P$, $I - Q$, PQ, $P + Q - PQ$ i $P + Q - 2PQ$ jest rzutem ortogonalnym. Opisać obrazy tych rzutów za pomocą podprzestrzeni $M = \mathrm{Im}P$ i $N = \mathrm{Im}Q$.

7. Dla ograniczonego ciągu liczb zespolonych $\{\lambda_n\}$ określamy operator T na przestrzeni ℓ^2 wzorem

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \ldots).$$

Znaleźć T^* oraz $(zI - T)^{-1}$.

8. Dla ograniczonej zespolonej funkcji ciągłej $g(x)$ na prostej określamy operator T na $L^2(\mathbb{R})$ wzorem $(Tf)(x) = g(x)f(x)$. Znaleźć spektrum operatora T i jego normę. Pokazać, że T jest operatorem normalnym. Przy jakich warunkach T jest samosprzężony ?

9. Pokazać, że jeśli T jest operatorem normalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, to T jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\|Tv\| \geqslant c\|v\|, \quad v \in \mathcal{H},$$

dla pewnej stałej $c > 0$.

10. Pokazać, że jeśli liczba z leży w spektrum operatora normalnego T, to liczba $|z|^2$ leży w spektrum operatora T^*T.

11. Niech $p(x,y)$ będzie wielomianem dwu zmiennych. Pokazać, że jeśli liczba z leży w spektrum operatora normalnego T, to liczba $p(z, \overline{z})$ leży w spektrum operatora $p(T, T^*)$.

12. U jest ograniczonym i odwracalnym odwzorowaniem liniowym z przestrzeni Banacha X na przestrzeń Banacha Y. T i S są operatorami ograniczonymi na przestrzeni X i Y odpowiednio, spełniającymi związek $S = UTU^{-1}$. Pokazać, że spektra operatorów S i T są równe.

13. Dla funkcji ciągłej $g(x)$ o okresie 2π określmy operator T na przestrzeni $L^2(0, 2\pi)$ wzorem

$$Tf(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy.$$

Pokazać, że T jest operatorem ograniczonym i $\|T\| \leqslant (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |g(x)|dx$. * Znaleźć spektrum operatora T. `Wskazówka:` Rozważyć odwzorowanie $U : L^2(0, 2\pi) \to \ell^2(\mathbb{Z})$

$$(Uf)(n) = \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Pokazać, że $(UTf)(n) = \widehat{g}(n)\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)(Uf)(n)$. Wywnioskować, że UTU^{-1} jest operatorem mnożenia przez ciąg $\{\widehat{g}(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ określonym na $\ell^2(\mathbb{Z})$. Skorzystać z zadań 7 i 9.

14. Niech T będzie operatorem samosprzężonym w przestrzeni Hilberta. Pokazać, że:

(a) $\|T\| \leqslant 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma(T) \subset [-1, 1]$.

(b) $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy T jest operatorem dodatnim.

`Wskazówka:` W (a) skorzystać z faktu, że $r(T) = \|T\|$. W (b) można założyć, że $\|T\| \leqslant 1$. Wtedy $\sigma(T) \subset [0, 1]$. Zatem $\sigma(2T - I) \subset [-1, 1]$. Z (a) mamy, że $\|I - 2T\| \leqslant 1$. To pociąga $\langle x - 2Tx, x\rangle \leqslant \langle x, x\rangle$, dla $x \in \mathcal{H}$.

15. Dla operatora samosprzężonego T określamy

$$m = \inf\{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\} \qquad M = \sup\{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}.$$

Pokazać, że $\sigma(T) \subset [m, M]$ oraz $m.M \in \sigma(T)$. `Wskazówka:` Zauważyć, że operatory $T - mI$ oraz $MI - T$ są dodatnie.