14. Zadania z analizy funkcjonalnej

1. Udowodnić, że jeśli ciąg $A_n \in B(\mathcal{H})$ jest słabo zbieżny, to również ciąg A_n^* jest słabo zbieżny. Pokazać, że stwierdzenie nie jest prawdziwe dla mocnej zbieżności.

2. (a) Niech $A_n, A \in B(\mathcal{H})$. Pokazać, że jeśli $A_n \geqslant 0$ oraz A_n jest zbieżny do A w normie operatorowej, to $A \geqslant 0$ oraz $\sqrt{A_n} \to \sqrt{A}$ w normie operatorowej.

(b) Pokazać, że jeśli $A_n \geqslant 0$ oraz $A_n \to A$ mocno, to również $\sqrt{A_n} \to \sqrt{A}$ mocno.

(c) Pokazać, że jeśli $A_n \to$ w normie operatorowej, to $|A_n| \to |A|$ w normie operatorowej.

(d) Pokazać, że jeśli $A_n \to A$ oraz $A_n^* \to A^*$ mocno, to również $|A_n| \to |A|$ mocno.

(e) Pokazać na przykładzie, że poprzednie stwierdzenie nie jest prawdziwe dla słabej zbieżności operatorowej.

3. (a) Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha. Pokazać, że jeśli dla $T_n \in B(X, Y)$ oraz $\{T_n x\}$ jest ciągiem Cauchy'ego dla każdego $x \in X$, to istnieje $T \in B(X, Y)$ taki, że $T_n \to T$ mocno.

(b) Czy poprzednie stwierdzenie jest prawdziwe dla ciągów uogólnionych T_α ?

4. Niech $T_t : f(x) \mapsto f(x+t)$ będzie operatorem na $L^2(\mathbb{R})$. Znaleźć normę T_t. Do czego są zbieżne operatory T_t, gdy $t \to \infty$, i w jaki sposób ? Odpowiedzieć na te same pytania dla $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}\,dx)$.

5. Niech $\mathcal{H}$ będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta.

(a) Pokazać, że jeśli $A_n, B_n \in B(\mathcal{H})$ są mocno zbieżne do A i B odpowiednio to $A_n B_n$ jest mocno zbieżny do AB.

(b) Pokazać na przykładzie, że jeśli $A_n, B_n \in B(\mathcal{H})$ są słabo zbieżne do A i B odpowiednio to $A_n B_n$ nie musi być słabo zbieżny do AB.

6. Niech T będzie operatorem określonym na ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$, wzorem

$$(Tx)_n = \lambda_n x_n, \quad x \in \ell^p.$$

Pokazać, że T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_n \xrightarrow{n} 0$.

7. Dla funkcji g ciągłej na $[0,1]$ określamy operator $T : L^p(0,1) \to L^p(0,1)$ przez $(Tf)(x) = g(x)f(x)$. Pokazać, że T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $g = 0$.

8. Niech $K(x,y)$ będzie funkcją całkowalną z kwadratem na $[0,1] \times [0,1]$. Pokazać, że operator T określony na $L^2(0,1)$ wzorem

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy$$

jest ograniczony i zwarty. `Wskazówka:` Wskazać bazę ortonormalną w $L^2([0,1] \times [0,1])$ i rozwinąć $K(x,y)$ względem tej bazy.

9. Pokazać, że jeśli $T : X \to Y$ jest zwartym operatorem liniowym pomiędzy przestrzeniami Banacha X i Y, to T nie może być "na" chyba, że przestrzeń Y ma skończony wymiar.

10. Pokazać, że rodzina zwartych operatorów liniowych z przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y tworzy domkniętą podprzestrzeń liniową w $B(X,Y)$.

11. T jest zwartym operatorem z przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y. Pokazać, że jeśli obraz operatora zwartego $T(X)$ jest przestrzenią nieskończonego wymiaru, to obraz ten nie jest domknięty w Y.

12. Pokazać, że obraz operatora zwartego $T : X \to Y$ jest przestrzenią ośrodkową. `Wskazówka:` W przestrzeni metrycznej zupełnej podzbiór jest warunkowo zwarty wtedy i tylko wtedy,gdy jest całkowicie ograniczony.