15. Zadania z analizy funkcjonalnej

1. W przestrzeni ℓ^2 określamy operator T wzorem

$$(Tx)(n) = \begin{cases} 0, & \text{dla } n = 0, \\ \frac{1}{n}\, x_{n-1}, & \text{dla } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Pokazać, że T jest zwarty. Obliczyć $\|T^n\|$ oraz promień spektralny.

2. Niech a_i, b_i będą elementami przestrzeni $L^2(0,1)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Niech $K(x,y) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(y)$. Określmy operator T na $L^2(0,1)$ wzorem

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy.$$

Niech $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Pokazać, że dla dowolnej ustalonej funkcji $g \in L^2(0,1)$ równanie $Tf - \lambda f = g$ ma jednoznaczne rozwiązanie $f \in L^2(0,1)$, albo dla niektórych g równanie ma nieskończenie rozwiązań, a dla pozostałych g, nie ma ich wcale.

3. Niech

$$K(x,y) = \begin{cases} (1-x)y & \text{dla } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1, \\ (1-y)x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Określamy operator T na $L^2(0,1)$ wzorem

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy.$$

Pokazać, że wartościami własnymi T są liczby $(n\pi)^{-2}$, $n = 1, 2, \ldots$, przy czym odpowiadająca popdprzestrzeń własna jest jednowymiarowa. `Wskazówka:` Pokazać, że jeśli funkcja f spełnia $Tf = \lambda f$ dla $\lambda \neq 0$, to f jest klasy C^∞ i spełnia równanie $\lambda f'' + f = 0$ z warunkami $f(0) = f(1) = 0$. Przypadek $\lambda = 0$ rozpatrzyć oddzielnie. Zbadać rozwiązalność względem f równania $Tf - \lambda f = g$ dla $g(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n \sin \pi x$.

***4.** Niech A, B będą operatorami ograniczonymi na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ oraz $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} B$. Pokazać, że jeśli B jest zwarty, to A też jest zwarty.

5. Niech $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ będzie bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Pokazać, że operator T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_n \sup\{\|Tx\| \,:\, \|x\| = 1, x \perp e_1, e_2, \ldots, e_n\} = 0.$$

6. Pokazać, że jeśli T jest zwartym operatorem w przestrzeni Hilberta, to równanie $Tx = x$ ma niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $T^*x = x$ ma niezerowe rozwiązanie. Pokazać, że obie przestrzenie rozwiązań mają ten sam wymiar.

7. Niech T będzie zwartym operatorem na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Pokazać, że dla dowolnej niezerowej wartości własnej λ operatora T każda z podprzestrzeni $\ker(\lambda I - T)^n$ ma skończony wymiar, oraz wymiary te są wspólnie ograniczone przez liczbę zależną tylko od λ.

8. Operator $A \geqslant 0$ jest zwarty. Pokazać, że $A^{1/2}$ też jest zwarty. Pokazać, że jeśli $0 \leqslant B \leqslant A$, to również B jest zwarty.

9. $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ jest bazą ortonormalną w $\mathcal{H}$. Dla operatora dodatniego $A \in B(\mathcal{H})$ określamy ślad wzorem

$$\operatorname{tr} A = \sum_{n=1}^\infty (A\varphi_n, \varphi_n).$$

Pokazać, że $\operatorname{tr} A$ nie zależy od wyboru bazy ortonormalnej. Wykazać, że

(a) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$;

(b) $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A, \quad \lambda \geqslant 0$;

(c) $\operatorname{tr}(UAU^{-1}) = \operatorname{tr} A$ dla dowolonego operatora unitarnego U;

(d) jeśli $0 \leqslant A \leqslant B$, to $\operatorname{tr} A \leqslant \operatorname{tr} B$.

10. Operator $A \in B(\mathcal{H})$ nazywamy operatorem śladowym jeśli $\operatorname{tr}|A| < \infty$. Rodzinę operatorów śladowych oznaczamy przez C_1. Pokazać, że

(a) jeśli $A \in C_1$, to $\lambda A \in C_1$.

(b) jeśli $A \in C_1$, to $A^* \in C_1$;

(c) jeśli $A \in C_1$ i $B \in B(\mathcal{H})$, to $AB \in C_1$ i $BA \in C_1$. `Wskazówka.` Wykorzystać zasadę minimaksu.

(d) jeśli $A, B \in C_1$, to $A + B \in C_1$. `Wskazówka.` Użyć rozkładu polarnego dla operatorów A, B i $A + B$.

11. Pokazać, że każdy operator śladowy jest zwarty. Wykazać, że operator zwarty A jest śladowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum \lambda_n < \infty$, gdzie λ_n jest ciągiem liczb singularnych operatora A.

12. Pokazać, że funkcja $\|A\|_1 = \operatorname{tr}|A|$ jest normą na C_1. Pokazać, że C_1 z normą $\|\cdot\|_1$ jest przestrzenią Banacha.

13. Niech C_2 oznacza rodzinę operatorów Hilberta–Schmidta. Pokazać, że jeśli $A, B \in C_2$, to $AB \in C_1$. Pokazać, że każdy operator śladowy jest iloczynem dwu operatorów Hilberta–Schmidta.

14. Pokazać, że dla $A \in C_1$ i dowolnej bazy ortonormalnej $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ szereg $\sum(A\varphi_n, \varphi_n)$ jest zbieżny i jego suma nie zależy od wyboru bazy. Określmy $\operatorname{tr} A = \sum(A\varphi_n, \varphi_n)$. Pokazać, że $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$, gdzie $A \in C_1$ i $B \in B(\mathcal{H})$ lub $A, B \in C_2$.

15. Pokazać, że jeśli $\sum |(A\varphi_n, \varphi_n)| < \infty$ dla dowolnej bazy ortonormalnej, to $A \in C_1$. Pokazać, że jeśli $\sum \|A\varphi_n\| < \infty$ dla pewnej bazy ortonormalnej, to $A \in C_1$.

$*$**16.** P i Q są rzutami ortogonalnymi w przestrzeni Hilberta takimi, że $P - Q$ jest operatorem śladowym. Pokazać, że $\operatorname{tr}(P - Q)$ jest liczbą całkowitą. `Wskazówka.` P i Q są przemienne z $(P - Q)^2$.