2a. Zadania z analizy funkcjonalnej

1. Wskazać normę w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ inną niż normy $\| \ \|_p$ dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ale taką, że $\|e_i\| = 1$ dla każdego z wektorów standardowej bazy $e_1, \ \ldots, \ e_n$.

2. Pokazać, że w przestrzeni liniowej unormowanej X zbiory

$$\{x \in X \ : \ \|x\| \leqslant 1\} \qquad \{x \in X \ : \ \|x\| = 1\}$$

są domknięte.

3. Pokazać, że ciąg funkcji f_n jest zbieżny do funkcji f w normie przestrzeni $C[0,1]$ (tzn. $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ przy $n \to \infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy f_n jest jednostajnie zbieżny do f.

4. Udowodnić zupełność przestrzeni C[0,1]. `Wskazówka:` Dla ciągu Cauchy'ego f_n pokazać zbieżność punktową korzystając z nierówności

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty$$

i z zupełności $\mathbb{C}$ (lub $\mathbb{R}$). Niech f będzie granicą punktową ciągu f_n. Pokazać, że f jest jednostajną granicą ciągu f_n korzystając z nierówności

$$|f_n(t) - f(t)| \leqslant |f_m(t) - f(t)| + \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Pokazać, że f jest ciągła, korzystając z nierówności

$$|f(t) - f(s)| \leqslant |f_n(t) - f_n(s)| + 2\|f_n - f\|_\infty.$$

`Uwaga:` Dowód przenosi się na przypadek $C(K)$ przestrzeni funkcji ciągłych na zwartej przestrzeni metrycznej (lub topologicznej) K.

5. Niech c oznacza przestrzeń liniową ciągów zbieżnych o wyrazach zespolonych. Niech $\|\{x_n\}\| = \sup_{n\geqslant 1} |x_n|$. Pokazać, że c jest przestrzenią Banacha. Pokazać, że ciągi zbieżne do 0 tworzą domkniętą podprzestrzeń c_0 w c. `Wskazówka:` Można utożsamić c z $C(K)$, gdzie $K = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} \cup \{0\}$.

6. Udowodnić twierdzenie Weierstrassa o gęstości wielomianów w C[-1,1] korzystając z tego, że każda funkcja ciągła o okresie 2π jest jednostajną granicą ciągu wielomianów trygonometrycznych. `Wskazówka:` Dla funkcji ciągłej $f(x)$ określonej na $[-1,1]$ funkcja $f(\cos t)$ ma okres 2π i jest parzysta. Z tego powodu można ją aproksymować jednostajnie wielomianami trygonometrycznymi postaci

$$a_0 + a_1 \cos t + \ldots + a_n \cos nt.$$

Zauważyć, że $\cos nt$ jest wielomianem od $\cos t$ tzn.

$$\cos nt = T_n(\cos t),$$

gdzie T_n jest wielomianem stopnia n. Pokazać, że funkcję $f(x)$ można aproksymować jednostajnie wielomianami postaci

$$a_0 + a_1 T_1(x) + \ldots + a_n T_n(x).$$

7. Dla funkcji ciągłej f na przedziale $[0,1]$ określamy wielomian Bernsteina wzorem

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(1-x)^{n-k}x^k.$$

Pokazać, że $B_n(f)$ jest jednostajnie zbieżny do f. `Wskazówka:` Zajrzeć do książki S. Łojasiewicz, Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych (rozdział II §3, Twierdzenie 1).