3a. Zadania z analizy funkcjonalnej

1. Udowodnić, że jeśli $x_n \to x$ oraz $y_n \to y$ w przestrzeni unormowanej X, to $x_n + y_n \to x + y$. Pokazać, że jeśli $\lambda_n \to \lambda$, gdzie $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{C}$, to $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

2. Pokazać zupełność przestrzeni $L^p(0,1)$, dla $p \geqslant 1$. `Wskazówka:` Postępować tak jak w przypadku $p = 1$. Skorzystać z nierówności
$$\| \sum |f_n| \|_p \leqslant \sum \|f_n\|_p.$$

3. W przestrzeni $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ znaleźć odległość funkcji x^n od dwuwymiarowej podprzestrzeni $E = \{ax + b \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$.

4. Pokazać, że dla $0 < p < 1$ funkcjonał $\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$ określony na ciągach dla których szereg występujący w definicji jest zbieżny, nie jest normą, bo nie spełnia warunku trójkąta. Pokazać, że spełnione są nierówności

$$\|x + y\|_p^p \leqslant \|x\|_p^p + \|y\|_p^p, \qquad \|x + y\|_p \leqslant 2^{1/p-1}(\|x\|_p + \|y\|_p).$$

5. Pokazać, że $L^1(0,1)$ zawiera dwie liniowo niezależne funkcje f i g takie, że $\|f+g\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1$. Pokazać, że w normie przestrzeni $L^p(0,1)$, dla $1 < p < \infty$, taka sytuacja nie jest możliwa.

6. Pokazać, że jeśli X Y są przestrzeniami unormowanymi z normami $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, to ich suma prosta $X \oplus Y$ jest przestrzenią unormowaną z normą

$$\|x \oplus y\| = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Pokazać, że jeśli X i Y są zupełne, to również $X \oplus Y$ jest zupełna.

7. Dla ciągu X_n przestrzeni unormowanych z normami $\|\cdot\|_{X_n}$ określamy sumę prostą X

$$X = \Big\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \ | \ x_n \in X_n, \ \|\{x_n\}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n} < \infty \Big\}.$$

Pokazać, że X jest przestrzenią unormowaną z normą $\|\{x_n\}\|$. Pokazać, że X jest zupełna jeśli wszystkie X_n są przestrzeniami zupełnymi.

8. Udowodnić, że jeśli podzbiory $A \subset B$ przestrzeni metrycznej X spełniają warunek, że A jest gęsty w B oraz B jest gęsty w X, to A jest gęsty w X.

9. Wykorzystać poprzednie zadanie aby udowodnić, że wielomiany o współczynnikach wymiernych stanowią gęsty podzbiór przestrzeni $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ z normie $\|\cdot\|_\infty$. Udowodnić, że ciągi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ o skończenie wielu wyrazach niezerowych takich, że $x_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ stanowią gęsty podzbiór każdej przestrzeni ℓ^p dla $1 \leqslant p < \infty$, w normie $\|\cdot\|_p$.

***10.** Dla domkniętej podprzestrzeni M w przestrzeni Banacha X z normą $\|\cdot\|_X$, określamy przestrzeń ilorazową X/M jako przestrzeń klas równoważności względem relacji w X

$$x \sim y \quad \text{jeśli} \quad x - y \in M.$$

Oznaczając klasę równoważności elementu $x \in X$ przez $[x]$ określamy dodawanie i mnożenie przez skalar wzorem
$$\alpha[x] + \beta[y] = [\alpha x + \beta y].$$

Pokazać, że ta definicja jest poprawna, tzn. prawa strona zależy jedynie od klas równoważności, z których pochodzą x i y, a nie od samych x i y.
Określmy

$$\|[x]\| = \inf_{m\in M} \|x-m\|_X.$$

Pokazać, że ta funkcja ma własności normy. Pokazać, że X/M z tą normą jest przestrzenią Banacha.
`Wskazówka:` Pokazać, że jeśli $\sum \|[x_n]\| < \infty$, to szereg $\sum [x_n]$ jest zbieżny. W tym celu dla każdego n wybrać $m_n \in M$ tak, aby

$$\|x_n - m_n\|_X \leqslant 2 \inf_{m\in M} \|x_n - m\|_X.$$

Zauważyć, że szereg $\sum(x_n - m_n)$ jest zbieżny w X. Oznaczając jego sumę przez s pokazać, że $[s] = \sum[x_n]$ w X/M.

11. Niech $X = C[0,1]$ i $M = \{f \mid f(0) = f(1) = 0\}$. Pokazać, że X/M można utożsamić z $\mathbb{C}^2$, z normą $\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

***12.** $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest gęstym podzbiorem kuli jednostkowej w przestrzeni Banacha X. Określmy odwzorowanie $J : \ell^1 \to X$, wzorem

$$J \,:\, \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$$

(a) Pokazać, że J jest ciągłe.

(b) Pokazać, że ker$J$ jest domknięte i że J "podnosi" się do ciągłego odwzorowania $\hat{J}$ z przestrzeni ilorazowej $\ell^1/\ker J$ w X.

(c) Pokazać, że $\operatorname{Im}\hat{J} = X$. `Wskazówka.` Przy ustalonym x, $\|x\| = 1$, wybrać indukcyjnie $x_{n(i)}$ tak aby

$$\|x - \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} x_{n(i)}\| < 2^{-k}.$$

(d) Zamieniając w (c) liczbę 2 na 3,4, ..., pokazać, że $\hat{J}$ jest izometrią.

13. Znaleźć normę operatora identycznościowego z $L^p(a,b)$ w $L^q(a,b)$.

14. Rozważamy przestrzeń $X = \mathbb{R}^n$ z normą $\|\cdot\|_2$. Niech A będzie macierzą symetryczną wymiaru $n\times n$ o wyrazach rzeczywistych. Pokazać, że norma operatora liniowego związanego z A z przestrzeni X w siebie, jest równa największej z liczb $|\lambda|$, gdzie λ jest wartością własną macierzy A. Jaka jest norma operatora liniowego związanego z macierzą ortogonalną U, tzn. taką, że $U^T = U^{-1}$.

15. Dla jakich funkcji $a(x)$ operator mnożenia przez $a(x)$ jest ciągłym odwzorowaniem z $L^p(0,1)$ w $L^q(0,1)$?

16. Obliczyć normę operatora

$$s_n f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x-t)\,dt$$

w przestrzeni $C[-\pi,\pi]$ i w przestrzeni $L^2(-\pi,\pi)$, gdzie $D_n(t) = 1 + 2\cos t + \ldots + 2\cos nt$.