1. Zadania z analizy funkcjonalnej 3

∗1. Niech $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ będzie ograniczonym operatorem liniowym. Niech $\lambda \in \partial\sigma(T)$, tzn. λ jest punktem brzegowym w $\mathbb{C}$ spektrum operatora T. Pokazać, że można znaleźć ciąg wektorów jednostkowych v_n takich, że $\|Tv_n - \lambda v_n\| \to 0$, gdy $n \to \infty$. To oznacza, że λ jest aproksymatywną wartością własną. `Wskazówka:` Niech $\lambda_n \notin \sigma(T)$ oraz $\lambda_n \to \lambda$. Pokazać, że normy operatorów $(\lambda_n I - T)^{-1}$ nie są wspólnie ograniczone. Na tej podstawie znaleźć ciąg wektorów jednostkowych w_n spełniających $\|(\lambda_n I - T)^{-1} w_n\| \to \infty$.

2. Dla operatora $S : \ell^2 \to \ell^2$ określonego wzorem
$$S(x_0, x_1, x_2, \ldots) \to (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$
i liczb $|\lambda| = 1$ skonstruować aproksymatywne wektory własne.

3. Załóżmy, że spektrum operatora normalnego T składa się tylko z jednego punktu z_0. Pokazać, że $T = z_0 I$. `Wskazówka:` Promień spektralny operatora normalnego jest równy jego normie.

4. Pokazać, że teza poprzedniego zadania nie jest prawdziwa dla dowolnego operatara z $B(\mathcal{H})$. `Wskazówka:` Rozważyć macierze zespolone 2×2 oraz $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$.

5. Pokazać, że jeśli liczba z_0 jest izolowanym punktem spektrum operatora unitarnego U, to z_0 jest wartością własną operatora U. `Wskazówka:` Rozważyć operator $f(U)$, gdzie f jest nieujemną funkcję ciągłą określoną na okregu taką, że $f(z_0) = 1$ oraz $f(z) = 0$ dla $z \neq z_0$ i $z \in \sigma(U)$. Zauważyć, że funkcje $zf(z)$ oraz $z_0 f(z)$ są równe sobie na $\sigma(U)$.

6. Załóżmy, że spektrum operatora unitarnego U jest skończonym podzbiorem okręgu jednostkowego złożonym z $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Korzystając z dwu poprzednich zadań pokazać, że
$$U = \sum_{k=1}^{n} z_k P_k,$$
gdzie P_k jest rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń $\mathcal{H}_k = \{v \in \mathcal{H} \,|\, Uv = z_k v\}$.

7. Pokazać, że jeśli w_1 i w_2 są funkcjami o wahaniu ograniczonym, ciągłymi lewostronnie w (a, b), ciągłymi prawostronnie w a i $w_1(a) = w_2(a) = 0$, oraz
$$\int_a^b f(x)dw_1(x) = \int_a^b f(x)dw_2(x), \qquad f \in C[a,b],\ f(a) = f(b),$$
to $w_1(x) = w_2(x)$ dla $a \leqslant x \leqslant b$. (por. zadanie 14 lista 8,
`http://www.math.uni.wroc.pl/ szwarc/pdf/anfun2007/anfun8.pdf`).

8. Niech μ będzie miarą zespoloną na przedziale $(-\pi, \pi]$. Pokazać, że funkcja określona przez $w(x) = \mu(-\pi, x)$, dla $-\pi < x < \pi$, oraz $w(-\pi) = 0$, $w(\pi) = \mu(-\pi, \pi]$ ma wahanie ograniczone, jest lewostronnie ciągła wewnątrz przedziału i prawostronnie ciągła w $-\pi$.

9. Niech $E(\lambda)$ dla $\lambda \in (-\pi, \pi]$ oznacza rodzinę rzutów związaną z operatorem unitarnym U. Obliczyć mocną granicę
$$\lim_{\lambda \to -\pi} E(\lambda).$$

10. Wskazać operator unitarny U, dla którego zbiór wartości własnych jest gęstym podzbiorem okręgu jednostkowego.

11. Wskazać operator unitarny bez wartości własnych, którego spektrum jest równe ustalonemu domkniętemu łukowi koła jednostkowego.

12. Pokazać, że dla operatora unitarnego U ciąg operatorów
$$\frac{1}{n}(I + U + \ldots + U^{n-1})$$
jest zbieżny. `Wskazówka:` Zbadać zachowanie się tego operatora na $\mathrm{Im}\,(I - U)$ i na dopełnieniu ortogonalnym.