2. Zadania z analizy funkcjonalnej 3

1. Podać przykład dwu rzutów ortogonalnych P i Q takich, że $P-Q$ jest operatorem nieskończenie wymiarowym oraz $P-Q$ jest operatorem śladowym.

2. Niech T będzie operatorem zwartym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ z wartością własną $\lambda \neq 0$. Wiadomo, że dla pewnej liczby n mamy $\ker(\lambda I - T)^n = \ker(\lambda I - T)^{n+1}$. Pokazać, że przestrzeń $E_\lambda = \ker(\lambda I - T)^n$ jest niezmiennicza dla operatora T, tzn. $T(E_\lambda) = E_\lambda$. Pokazać, że przestrzeń $F_\lambda = \mathrm{Im}\,(\lambda I - T)^n$ jest domknięta oraz $T(F_\lambda) \subset F_\lambda$. Udowodnić, że $E_\lambda \cap F_\lambda = \{0\}$ oraz $E_\lambda + F_\lambda = \mathcal{H}$.

3. Niech φ będzie ograniczonym funkcjonałem liniowym na C_1. Pokazać, że istnieje operator $A \in B(\mathcal{H})$ taki, że $\varphi(X) = trAX$. `Wskazówka:` Dla wektorów x i y z $\mathcal{H}$ niech $X_{x,y}v = \langle v, y\rangle x$. Pokazać, że $\|X_{x,y}\| = \|X_{x,y}\|_1 = \|x\|\,\|y\|$. Pokazać, że forma półtoraliniowa $B(x,y) = \varphi(X_{x,y})$ jest ograniczona.

4. Pokazać, że każdy ograniczony funkcjonał liniowy φ na przestrzeni $K(\mathcal{H})$ operatorów zwartych ma postać $\varphi(X) = tr(AX)$ dla pewnego operatora A z C_1. `Wskazówka:` Korzystając ze wskazówki do poprzedniego zadania znaleźć operator $A \in B(\mathcal{H})$ spełniający $\varphi(X_{x,y}) = trAX_{x,y}$. Następnie udowodnić, że A jest śladowy. W tym celu zbadać działanie funkcjonału na operatorach postaci $X = \sum_{n=1}^N X_{e_n,f_n}$, dla dwu układów ortonormalnych $\{e_n\}_{n=1}^N$ i $\{f_n\}_{n=1}^N$. Zauważyć, że $\|X\| = 1$. Dobrać odpowiednio układy ortonormalne zgodnie z rozkładem $A = U|A|$.

5. Operatory T_1 i T_2 są ograniczone na przestrzeniach Hilberta $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$. Pokazać, że dla operatora $T = T_1 \oplus T_2$ nana przestrzeni Hilberta $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$

(a) $\|T\| = \max\{\|T_1\|, \|T_2\|\}$

(b) $\|T\|_{HS} = (\|T_1\|_{HS}^2 + \|T_2\|_{HS}^2)^{1/2}$

(c) $\|T\|_1 = \|T_1\|_1 + \|T_2\|_1$

6. Pokazać, że dla macierzy A wymiaru $n \times n$ mamy

$$\|A\|_1 \leqslant \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \leqslant n^2 \|A\|$$

7. Niech A będzie algebrą Banacha A z jednością. Załóżmy, że $\lambda \in \partial\sigma(x)$ dla $x \in A$. Pokazać, że istnieje ciag elementów $y_n \in A$ takich, że $\|y_n\| = 1$ oraz $\|(\lambda e - x)y_n\| \to 0$. Wskazać przykład algebry Banacha, dla której $\lambda \in \operatorname{int}\sigma(x)$ oraz $\|(\lambda e - x)y\| \geqslant c\|y\|$ dla pewnej stałej $c > 0$.