3. Zadania z analizy funkcjonalnej 3

1. Operatory A, B w przestrzeni $B(\mathcal{H})$ są dodatnie. Pokazać, że operator $I + AB$ jest odwracalny. `Wskazówka` Dla elementów a, b algebry Banacha mamy $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$.

2. T zadany jest na $\ell^2(\mathbb{N})$ przez

$$Tx(n) = \sum_{m=0}^{\infty} a(m,n)x(m), \quad n \geqslant 0,$$

przy czym

$$\sup_n \sum_{m=0}^{\infty} |a(m,n)| \leqslant 1 \qquad \sup_m \sum_{n=0}^{\infty} |a(m,n)| \leqslant 1.$$

Pokazać, że $\|T\| \leqslant 1$.

$*$**3.** A jest ograniczonym operatorem liniowym na przestrzeni Hilberta. Promień spektralny $r(A)$ jest równy 1. Pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje operator odwracalny C taki, że $\|CAC^{-1}\| \leqslant 1 + \varepsilon$.

4. Niech $C^n[0,1]$ przestrzeń wszystkich funkcji zespolonych na $[0,1]$ n-krotnie różniczkowalnych w sposób ciągły na $[0,1]$. Pokazać, że $C^n[0,1]$ jest algebrą Banacha z mnożeniem i dodawaniem punktowym z normą

$$\|f\| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \sum_{k=0}^{n} \frac{|f^{(k)}(t)|}{k!}.$$

Znaleźć charaktery tej algebry.

5. Pokazać, że każdy domknięty ideał algebry $C[0,1]$ ma postać $\{f \in C[0,1] \, : \, f(x) = 0, \ x \in F\}$ dla pewnego domkniętego podzbioru $F \subset [0,1]$.

6. Niech A będzie przemienną algebrą Banacha z jednością. Dla funkcji całkowitej $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ i $a \in A$ określamy

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n.$$

Pokazać, że $(fg)(a) = f(a)g(a)$, dla funkcji całkowitych f i g. Pokazać, że jeśli $f(a) = 0$, to $\sigma(a)$ jest zawarty w zbiorze zer funkcji $f(z)$. Zauważyć, że można określić $f(a)$ dla funkcji analitycznej f w kole o środku w zerze i promieniu większym niż $\|a\|$.

7. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania. Pokazać, że elementy postaci e^a dla $a \in A$ są odwracalne. Pokazać, że zbiór e^A tych elementów jest spójny. Udowodnić, że jeśli zbiór $\sigma(b)$ dla elementu odwracalnego nie rozdziela 0 od ∞, to $b \in e^A$. Udowodnić, że jeśli $\|e - b\| < 1$, to $b \in e^A$. `Wskazówka:` Pokazać, że można określić $\ln b$ oraz uzasadnić, że $b = e^{\ln b}$.

8. Niech ω_n będzie ciągiem liczb dodatnich spełniającym $\omega_0 = 1$ oraz $\omega_{m+n} \leqslant \omega_m \omega_n$ dla liczba całkowitych n, m. Niech $\ell^1(\omega_n)$ oznacza zbiór wszystkich zespolonych funkcji argumentu całkowitego, dla których skończona jest norma

$$\|f\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |f(n)|\omega_n.$$

Określamy mnożenie wzorem

$$(f * g)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k).$$

Pokazać, że $\ell^1(\omega_n)$ jest algebrą Banacha. Udowodnić istnienie granic $R_+ = \lim_{n\to\infty} \omega_n^{1/n}$ oraz $R_- = \lim_{n\to\infty} \omega_{-n}^{-1/n}$ i, że $R_- \leqslant R_+$. Pokazać, że przestrzeń charakterów można utożsamić z pierścieniem $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : R_- \leqslant |z| \leqslant R_+\}$. Jak wyglądają transformaty Gelfanda ?

9. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania przeanalizować następujące przykłady.

$$\omega_n = 2^n \qquad \omega_n = \max(2^n, 1) \qquad \omega_n = 2n^2 + 1 \qquad \omega_n = 2\max(0, n)^2 + 1$$

W którym przypadku algebra $A = \ell^1(\omega_n)$ ma własność samosprzężoności, tzn. przestrzeń $\widehat{A}$ wraz z każdą funkcją zawiera jej funkcję sprzężoną ? Czy istnieje taka algebra $A = \ell^1(\omega_n)$, że Δ jest okręgiem oraz $\widehat{A}$ składa się tylko z funkcji klasy C^∞ ?