4. Zadania z analizy funkcjonalnej 3

Wszystkie krzywe występujące poniżej są kawałkami klasy C^1.

1. Pokazać, że w przemiennej algebrze Banacha z jednością funkcjonały multiplikatywne są liniowo niezależne.

2. Niech T będzie operatorem ograniczonym na przestrzeni Hilberta spełniającym $T^n = 0$. Wyznaczyć funkcjonały multiplikatywne algebry $\mathrm{span}\{I, T, \ldots, T^{n-1}\}$.

3. Niech B będzie domkniętą podalgebrą przemiennej algebry Banacha A z jednością $e \in B$. Pokazać, że element $b \in B$ odwracalny w A nie musi być odwracalny w A. `Wskazówka:` Przeanalizować przykłady omawiane na wykładzie.

4. Pokazać, że jeśli φ jest funkcjonałem multiplikatywnym w algebrze Banacha bez jedności A to funkcjonał $\widetilde{\varphi}$ określony na $\widetilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ wzorem $\widetilde{\varphi}(a \oplus \lambda) = \varphi(a) + \lambda$ jest multiplikatywny.

5. Udowodnić, że dla wielomianu $p(z)$ oraz krzywej zamkniętej C nie przecinającej spektrum elementu a algebry Banacha A zachodzi wzór

$$\int\limits_C [p(z)e - p(a)](ze - a)^{-1}\, dz = 0.$$

6. Niech $f_n(z)$ będzie ciągiem funkcji holomorficznych o wartościach w algebrze Banacha A określonych na pewnym otwartym podzbiorze $U \subset \mathbb{C}$. Niech C będzie krzywą zawartą w U. Załóżmy, że $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ dla $z \in C$. Pokazać, że

$$\int\limits_C f_n(z)\, dz \to \int\limits_C f(z)\, dz.$$

7. Niech A będzie algebrą Banacha z jednością. Niech f będzie funkcją holomorficzną w obszarze otwartym $U \supset \sigma(a)$. Załóżmy, że zorientowana dodatnio krzywa prosta C jest zawarta w U i rozłączna ze spektrum elementu a, ale niekoniecznie obiega $\sigma(a)$. Określmy

$$f_C(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(z)(ze - a)^{-1}\, dz.$$

(a) Pokazać, że obszar wewnątrz C nie zawiera punktów z $\sigma(a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_C(a) = 0$ dla wszystkich funkcji f holomorficznych w U.

(b) Pokazać, że jeśli g jest holomorficzna w U, to $f_C(a) g_C(a) = (fg)_C(a)$.

(c) Znaleźć spektrum $f_C(a)$.

(d) Pokazać, że jeśli $f(z) \equiv 1$, to element $f_C(a)$ jest idempotentem.

(e) Pokazać, że dla dwu krzywych C_1 i C_2, jak wyżej, jeśli obszary domknięte ograniczone przez te krzywe są rozłączne, to $f_{C_1}(a) g_{C_2}(a) = 0$.

8. Niech f będzie funkcją ciągłą odwzorowującą otwarty podzbiór $U \subset \mathbb{C}$ w algebrę Banacha z jednością A. Załóżmy, że $\varphi \circ f$ jest funkcją holomorficzną dla każdego funkcjonału $\varphi \in A^*$. Pokazać, że wtedy f jest holomorficzna, tzn. posiada pochodną zespoloną dla $z \in U$. `Wskazówka:` Udowodnić, że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w - z}\, dw,$$

gdzie C jest prostą krzywą zamkniętą w U taką, że z leży wewnątrz C.