4. Zadania z analizy funkcjonalnej 3

Wszystkie krzywe występujące poniżej są kawałkami klasy C^1.

1. Niech $f(t)$ będzie funkcją ciągłą z przedziału $[a,b]$ w przestrzeń Banacha A. Niech P_1 i P_2 będą dwoma podziałami przedziału $[a,b]$ o średnicy mniejszej od liczby $\delta > 0$. Pokazać, że

$$\|S(P_1, f) - S(P_2, f)\| \leqslant (b-a) \sup_{|t-s|<2\delta} \|f(t) - f(s)\|,$$

gdzie $S(P, f)$ oznacza sumę całkową związaną z podziałem P i pewnym wyborem punktów pośrednich.

2. Pokazać, że jeśli φ jest funkcjonałem multyplikatywnym w algebrze Banacha bez jedności A to funkcjonał $\widetilde{\varphi}$ określony na $\widetilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ wzorem $\widetilde{\varphi}(a \oplus \lambda) = \varphi(a) + \lambda$ jest multyplikatywny.

3. Udowodnić, że dla wielomianu $p(z)$ oraz krzywej zamkniętej C nie przecinającej spektrum elementu a algebry Banacha A zachodzi wzór

$$\int_C [p(z)e - p(a)](ze - a)^{-1}\, dz = 0.$$

4. Niech $f_n(z)$ będzie ciągiem funkcji holomorficznych o wartościach w algebrze Banacha A określonych na pewnym otwartym podzbiorze $U \subset \mathbb{C}$. Niech C będzie krzywą zawartą w U. Załóżmy, że $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ dla $z \in C$. Pokazać, że

$$\int_C f_n(z)\, dz \to \int_C f(z)\, dz.$$

5. Niech A będzie $*$-algebrą Banacha z jednością. Niech f będzie funkcją holomorficzną w obszarze otwartym $U \supset \sigma(a)$. Załóżmy, że zorientowana dodatnio krzywa prosta C jest zawarta w U i rozłączna ze spektrum elementu a, ale niekoniecznie obiega $\sigma(a)$. Określmy

$$f_C(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)(ze - a)^{-1}\, dz.$$

(a) Pokazać, że obszar wewnątrz C nie zawiera punktów z $\sigma(a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_C(a) = 0$ dla wszystkich funkcji f holomorficznych w U.

(b) Pokazać, że jeśli g jest holomorficzna w U, to $f_C(a) g_C(a) = (fg)_C(a)$.

(c) Znaleźć spektrum $f_C(a)$.

(d) Pokazać, że jeśli $f(z) \equiv 1$, to $f_C(a)$ jest rzutem.

6. Niech f będzie funkcją ciągłą odwzorowującą otwarty podzbiór $U \subset \mathbb{C}$ w algebrę Banacha z jednością A. Załóżmy, że $\varphi \circ f$ jest funkcją holomorficzną dla każdego funkcjonału $\varphi \in A^*$. Pokazać, że wtedy f jest holomorficzna. `Wskazówka:` Udowodnić, że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z}\, dw,$$

gdzie C jest prostą krzywą zamkniętą w U taką, że z leży wewnątrz C.