5. Zadania z analizy funkcjonalnej 3

1. Pokazać, że jeśli dwie krzywe zamknięte C_1 i C_2 obiegają jednokrotnie spektrum $\sigma(a)$ elementu algebry Banacha A, to dla dowolnej funkcji $f(z)$ holomorficznej w obszarze otwartym U zawierającym obszary ograniczone przez te krzywe mamy

$$\int_{C_1} f(z)(ze-a)^{-1}\,dz = \int_{C_2} f(z)(ze-a)^{-1}\,dz.$$

`Wskazówka:` Uzasadnić, że istnieje krzywa zamknięta C_3 zawarta w U, obiegająca $\sigma(a)$, rozłączna zarówno z C_1 jak i z C_2.

2. Niech $f(z)$ będzie funkcją ciągłą określoną na krzywej C w płaszczyźnie zespolonej o wartościach w przestrzeni Banacha A. Pokazać, że

$$\left\|\int_C f(z)\,dz\right\| \leqslant l(C)\max_{z\in C}\|f(z)\|,$$

gdzie $l(C)$ oznacza długość krzywej.

3. Niech $f(s,t)$ będzie funkcją ciągłą określoną na $[a,b]\times[c,d]$ o wartościach w przestrzeni Banacha A. Pokazać, że funkcje

$$g(t)=\int_c^d f(t,s)\,ds \qquad h(s)=\int_a^b f(t,s)\,dt$$

są ciągłe oraz

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(t,s)\,dt\right)ds = \int_c^d\left(\int_a^b f(t,s)\,ds\right)dt.$$

4. Niech $f(z)$ będzie funkcją całkowitą. Pokazać, że dla elementu a algebry Banacha A mamy

$$f(a)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,a^n.$$

5. Niech A będzie podalgebrą Banacha algebry Banacha B, oraz $e\in A$. Pokazać, że dla elementu $a\in A$ mamy $\sigma_B(a)\subseteq\sigma_A(a)$ oraz $\partial\sigma_A(a)\subseteq\partial\sigma_B(a)$, gdzie ∂C oznacza brzeg zbioru $C\subset\mathbb{C}$. Wywnioskować, że jeśli $\sigma_B(a)\subset\mathbb{R}$, to $\sigma_B(a)=\sigma_A(a)$. `Wskazówka:` Pokazać, że jeśli $\lambda\in\partial\sigma_A(a)$, natomiast $\lambda_n\to\lambda$ oraz $\lambda_n\notin\sigma_A(a)$, to $\|(\lambda_n e-a)^{-1}\|\to\infty$. Z tego warunku wyprowadzić, że $\lambda\in\sigma_B(a)$.

6. Niech B będzie algebrą Banacha z jednością. Niech A oznacza domkniętą podalgebrę generowaną przez element a oraz elementy postaci $(ze-a)^{-1}$, dla $z\notin\sigma(a)$. Pokazać, że przestrzeń ideałów maksymalnych podalgebry A jest homeomorficzna z $\sigma(a)$. Udowodnić, że element a generuje algebrę A wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\sigma(a)$ nie rozcina płaszczyzny zespolonej.

7. Dla elementu a algebry Banacha za jednością A i funkcji f holomorficznej w obszarze zawierającym $\sigma(a)$ mamy $f(a)=0$. Pokazać, że zbiór $\sigma(a)$ jest skończony. Wskazać wielomian $p(z)$ taki, że $p(a)=0$.

8. Niech f będzie ograniczoną funkcją rzeczywistą na $[0,1]$ ciągłą poza punktem $1/2$. Niech A oznacza algebrę Banacha generowaną przez f i $C[0,1]$. Wyznaczyć przestrzeń ideałów maksymalnych dla A.

9. Znaleźć przestrzeń ideałów maksymalnych algebry dyskowej A złożonej z funkcji ciągłych w domkniętym kole jednostkowym i holomorficznych wewnątrz tego koła.

10. Niech A będzie domkniętą $*$-podalgebrą C^*-algebry z jednością B oraz $e \in A$. Pokazać, że jeśli element $a \in A$ jest odwracalny w B, to $a^{-1} \in A$. (`Wskazówka:` Rozważyć elementy a^*a oraz aa^*). Wywnioskować, że dla $a \in A$ mamy $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

11. Pokazać, że w przemiennej C^*-algebrze $\sigma(a^*a) \subset [0, \infty)$.