5. Zadania z analizy funkcjonalnej 3

1. Pokazać, że jeśli dwie krzywe zamknięte C_1 i C_2 obiegają jednokrotnie spektrum $\sigma(a)$ elementu algebry Banacha A to dla dowolnej funkcji $f(z)$ holomorficznej w obszarze otwartym U zawierającym obszary ograniczone przez te krzywe mamy

$$\int_{C_1} f(z)(ze-a)^{-1}\,dz = \int_{C_2} f(z)(ze-a)^{-1}\,dz.$$

`Wskazówka:` Uzasadnić, że istnieje krzywa zamknięta C_3 zawarta w U, obiegająca $\sigma(a)$, rozłączna zarówno z C_1 jak i z C_2.

2. Niech $f(z)$ będzie funkcją ciągłą określoną na krzywej C w płaszczyźnie zespolonej o wartościach w przestrzeni Banacha A. Pokazać, że

$$\left\| \int_C f(z)\,dz \right\| \leqslant l(C) \max_{z\in C} \|f(z)\|,$$

gdzie $l(C)$ oznacza długość krzywej.

3. Niech $f(s,t)$ będzie funkcją ciągłą określoną na $[a,b]\times[c,d]$ o wartościach w przestrzeni Banacha A. Pokazać, że funkcje

$$g(t) = \int_c^d f(t,s)\,ds \qquad h(s) = \int_a^b f(t,s)\,dt$$

są ciągłe oraz

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(t,s)\,dt \right) ds = \int_c^d \left(\int_a^b f(t,s)\,ds \right) dt.$$

4. Niech $f(z)$ będzie funkcją całkowitą. Pokazać, że dla elementu a algebry Banacha A mamy

$$f(a) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, a^n.$$

5. Niech A będzie podalgebrą Banacha algebry Banacha B, oraz $e \in A$. Pokazać, że dla elementu $a\in A$ mamy $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$ oraz $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$, gdzie ∂C oznacza brzeg zbioru $C \subset \mathbb{C}$. Wywnioskować, że jeśli $\sigma_B(a) \subset \mathbb{R}$, to $\sigma_B(a) = \sigma_A(a)$. `Wskazówka:` Pokazać, że jeśli $\lambda \in \partial\sigma_A(a)$, natomiast $\lambda_n \to \lambda$ oraz $\lambda_n \notin \sigma_A(a)$, to $\|(\lambda_n e - a)^{-1}\| \to \infty$. Z tego warunku wyprowadzić, że $\lambda \in \sigma_B(a)$.

6. Niech B będzie algebrą Banacha z jednością. Niech A oznacza domkniętą podalgebrę generowaną przez element a oraz elementy postaci $(ze-a)^{-1}$, dla $z \notin \sigma(a)$. Pokazać, że przestrzeń ideałów maksymalnych podalgebry A jest homeomorficzna z $\sigma(a)$. Udowodnić, że element a generuje algebrę A wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\sigma(a)$ nie rozcina płaszczyzny zespolonej.

∗7. Niech M będzie podprzestrzenią liniową kowymiaru 1 w przemiennej algebrze Banacha z jednością A taką, że przekrój M i $e^A = \{e^a \mid a \in A\}$ jest pusty. Pokazać, że M jest ideałem maksymalnym. `Wskazówka:` Przy ustalonym elemencie a zastosować odpowiedni funkcjonał liniowy do funkcji całkowitej $F(z) = e^{za}$. Pokazać, że teza jest spełniona bez założenia przemienności algebry.

8. Dla elementu a algebry Banacha za jednością A i funkcji f holomorficznej w obszarze zawierającym $\sigma(a)$ mamy $f(a) = 0$. Pokazać, że zbiór $\sigma(a)$ jest skończony. Wskazać wielomian $p(z)$ taki, że $p(a) = 0$.

9. Niech f będzie ograniczoną funkcją rzeczywistą na $[0, 1]$ ciągłą poza punktem $1/2$. Niech A oznacza algebrę Banacha generowaną przez f i $C[0, 1]$. Wyznaczyć przestrzeń ideałów maksymalnych dla A.

10. Znaleźć przestrzeń ideałów maksymalnych algebry dyskowej A złożonej z funkcji ciągłych w domkniętym kole jednostkowym i holomorficznych wewnątrz tego koła.

11. Niech A będzie domkniętą $*$-podalgebrą C^*-algebry z jednością B oraz $e \in A$. Pokazać, że jeśli element $a \in A$ jest odwracalny w B, to $a^{-1} \in A$. (`Wskazówka:` Rozważyć elementy a^*a oraz aa^*). Wywnioskować, że dla $a \in A$ mamy $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.