6. Zadania z analizy funkcjonalnej 3

1. Niech A będzie operatorem ograniczonym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Załóżmy, że $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, gdzie $\mathcal{H}_0$ i $\mathcal{H}_1$ są domkniętymi podprzestrzeniami niezmienniczymi dla A, tzn. $A(\mathcal{H}_0) \subset \mathcal{H}_0$ oraz $A(\mathcal{H}_1) \subset \mathcal{H}_1$. Pokazać, że $\mathcal{H}_0$ i $\mathcal{H}_1$ są podprzestrzeniami niezmienniczymi dla każdego operatora postaci $f(A)$, gdzie f jest funkcją holomorficzną w otwartym otoczeniu spektrum operatora A.

2. Niech A będzie $*$-algebrą Banacha z jednością. Pokazać, że $e^* = e$. Udowodnić, że jeśli $a_n \to a$ to $a_n^* \to a^*$.

3. Pokazać, że dla elementu a w $*$-algebrze Banacha z jednością mamy $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}$. Pokazać, że jeśli $f \in \mathcal{H}(a)$, to dla $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ mamy $f^* \in \mathcal{H}(a^*)$. Wykazać, że wtedy $f(a)^* = f^*(a^*)$.

4. Niech a będzie elementem samosprzężonym w $*$-algebrze Banacha z jednością. Korzystając z poprzedniego zadania wywnioskować, że $(e^{ita})^* = e^{-ita}$ dla $t \in \mathbb{R}$.

5. Niech U będzie operatorem unitarnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$.

(a) Pokazać, że jeśli funkcja f jest holomorficzna w otoczeniu okręgu jednostkowego oraz f_0 jest obcięciem tej funkcji do okręgu jednostkowego, to $f(U) = f_0(U)$. `Uwaga:` Operator $f_0(U)$ jest określony poprzez granicę $p_n(U)$ dla ciągu wielomianów trygonometrycznych $P_n(t) = p_n(e^{it})$, zbieżnych jednostajnie do $F(t) = f(e^{it})$.

(b) Pokazać, że jeśli $\sigma(U)$ jest właściwym podzbiorem okręgu oraz f jest holomorficzna w otoczeniu łuku zawierającego $\sigma(U)$, to również $f(U) = f_0(U)$. `Wskazówka:` Skorzystać z twierdzenia Rungego.

(c) * Udowodnić, że ogólnie jeśli f jest holomorficzna w otoczeniu $\sigma(U)$, to $f(U) = f_0(U)$. `Wskazówka:` Jeśli spektrum jest spójne, to korzystamy z (b). Jeśli jest niespójne, to f jest holomorficzna w skończonej sumie rozłącznych zbiorów otwartych pokrywających spektrum. Skorzystać z zadania 1 i sprowadzić zagadnienie do przypadku (b).

6. Niech A będzie przemienną algebrą Banacha z jednością. Pokazać, że funkcjonały multyplikatywne są liniowo niezależne.

7. Pokazać, że jeśli $*$-algebra, niekoniecznie z jednością, posiada dwie C* normy $\|a\|$ i $|||a|||$ takie, że

$$|||a||| \leqslant \|a\|, \quad a \in A$$

to normy te są równe.

8. Pokazać, że w C*-algebrze, z jednością lub bez, mamy

$$\|a\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|ax\|.$$

`Wskazówka:` Pokazać, że supremum jest osiągnięte na elemencie $a^*/\|a\|$ dla $a \neq 0$.

9. Dla C*-algebry A bez jedności niech $B(A)$ oznacza przestrzeń ograniczonych operatorów liniowych z A w siebie. Pokazać, że odwzorowanie $A \ni a \mapsto L_a \in B(A)$, gdzie $L_a x = ax$, określa izometryczne włożenie A w $B(A)$. Niech $\mathcal{A}$ oznacza podzbiór w $B(A)$ złożony z operatorów postaci $L_a + \lambda I$, gdzie $a \in A$ oraz $\lambda \in \mathbb{C}$. Pokazać, że $\mathcal{A}$ jest podalgebrą. Pokazać, że $\mathcal{A}$ jest C*-algebrą ze sprzężeniem określonym przez $L_a + \lambda I \mapsto L_{a^*} + \overline{\lambda} I$ w normie odziedziczonej z $B(A)$.