7. Zadania z analizy funkcjonalnej 3

1. Przypuśćmy, że U jest unitarny i $\delta > 0$. Udowodnić, że można dobrać liczby $a_1, \ldots, a_n$ dla pewnego n, że

$$\|I - a_1 U - a_2 U^2 - \ldots - a_n U^n\| < \delta.$$

jeśli $\sigma(U)$ jest właściwym podzbiorem okręgu jednostkowego, ale że ta norma nie jest nigdy mniejsza od 1, jeśli $\sigma(U)$ pokrywa się z całym okręgiem. Czy w tym przypadku możliwe jest, aby dla $a_0 = 1$

$$\left\| \sum_{k=-n}^{n} a_k U^k \right\| < 1$$

2. Korzystając z twierdzenia Gelfanda-Naimarka pokazać, że jeśli element a w C^*-algebrze z jednością spełnia $a^* = a$ oraz $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$, to istnieje element b (nawet w domkniętej $*$-podalgebrze generowanej przez a) taki, że $b^2 = a$.

3. Element a jest samosprzężony w C^* -algebrze A. Pokazać, że istnieje element $b \in A$, że $b^3 = a$.

4. Funkcja rzeczywista f jest ciągła i różnowartościowa na przedziale $[c, d]$. Element a jest samosprzężony w C^* -algebrze A. Kiedy istnieje element $b \in A$ taki, że $f(b) = a$?

5. Pokazać, że dla elementu $a = a^*$ w C^*-algebrze z jednością istnieją elementy b i c takie, że $a = b - c$, $bc = 0$ oraz $\sigma(b), \sigma(c) \subset [0, +\infty)$.

6. Udowodnić, że przemienna C^*-algebra Banacha bez jedności jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią

$$V = \{f \in C(K) \,:\, f(x_0) = 0\}$$

dla pewnej zwartej przestrzeni Hausdorffa K i punktu $x_0 \in K$.

7. A i B są C^*-algebrami z jednością. Rozważamy $A \times B$ z działaniami po osiach. Jak należy określić normę, aby produkt $A \times B$ był C^*-algebrą ?

8. Pokazać, że jeśli v jest wektorem własnym operatora unitarnego U, to również dla operatora $g(U)$, dla dowolnej funkcji ciągłej g na $\mathbb{T}$. Czy v jest wektorem dla $E(\lambda)$?

9. W C^*-algebrze element x jest przemienny z elementem normalnym y. Pokazać, że x jest przemienny z y^* (twierdzenie B. Fuglede, dowód M. Rosenbluma). `Wskazówka:` Rozważyć funkcję holomorficzną

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \exp(\lambda y^*)\, x\, \exp(-\lambda y^*) = \exp(\lambda y^*) \exp(-\overline{\lambda} y)\, x\, \exp(\overline{\lambda} y) \exp(-z y^*) \\ &= \exp(\lambda y^* - \overline{\lambda} y)\, x\, \exp(\overline{\lambda} y - \lambda y^*) \end{aligned}$$

Zauważyć, że element $u(\lambda) := \exp(\lambda y^* - \overline{\lambda} y)$ jest unitarny, tzn. $u(\lambda)^* = u(\lambda)^{-1}$.

10. Dla operatora unitarnego U i wektora v funkcja $[-\pi, \pi] \ni t \mapsto \langle E(t)v, v\rangle$ wyznacza miarę borelowską na przedziale $[-\pi, \pi]$. Dla ograniczonej funkcji borelowskiej g na okręgu określamy funkcję $(u, v) \mapsto B(u, v)$

$$B(u, v) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it})\, dE(u + i^k v, u + i^k v\rangle$$

Pokazać, że $B(u, v)$ jest ograniczoną formą półtoraliniową spełniającą $|B(u, v)| \leqslant \|g\|_\infty \|u\|\, \|v\|$.

11. Korzystając z poprzedniego zadania istnieje operator $g(U)$ taki, że $B(u, v) = \langle g(U)u, v\rangle$. Pokazać, że operator $g(U)$ jest równy operatorowi określonemu na wykładzie w przypadku funkcji ciągłej g na $\mathbb{T}$.