7. Zadania z analizy funkcjonalnej 3

1. Przypuśćmy, że U jest unitarny i $\delta > 0$. Udowodnić, że można dobrać liczby $a_1, \ldots, a_n$ dla pewnego n, że

$$\|I - a_1U - a_2U^2 - \ldots - a_nU^n\| < \delta.$$

jeśli $\sigma(U)$ jest właściwym podzbiorem okręgu jednostkowego, ale że ta norma nie jest nigdy mniejsza od 1, jeśli $\sigma(U)$ pokrywa się z całym okręgiem.

2. Korzystając z twierdzenia Gelfanda-Naimarka pokazać, że jeśli element a w C^*-algebrze z jednością spełnia $a^* = a$ oraz $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$, to istnieje element b (nawet w domkniętej $*$-podalgebrze generowanej przez a) taki, że $b^2 = a$.

3. Element a jest samosprzężony w C^* -algebrze A. Pokazać, że istnieje element $b \in A$, że $b^3 = a$.

4. Funkcja rzeczywista f jest ciągła i różnowartościowa na przedziale $[c, d]$. Element a jest samosprzężony w C^* -algebrze A. Kiedy istnieje element $b \in A$ taki, że $f(b) = a$?

5. Pokazać, że dla elementu $a = a^*$ w C^*-algebrze z jednością istnieją elementy b i c takie, że $a = b - c$, $bc = 0$ oraz $\sigma(b), \sigma(c) \subset [0, +\infty)$.

6. Pokazać, że jeśli v jest wektorem własnym operatora unitarnego U, to również dla operatora $g(U)$, dla dowolnej funkcji ciągłej g na $\mathbb{T}$, a nawet dla ograniczonej funkcji borelowskiej.