4. Zadania z analizy funkcjonalnej

1. Podzbiór A przestrzeni unormowanej X nazywamy ograniczonym, jeśli $\sup_{a\in A}\|a\| < \infty$. Pokazać, że operator liniowy $T : X \to Y$ z przestrzeni unormowanej X w przestrzeń unormowaną Y jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy przekształca ograniczone podzbiory X w ograniczone podzbiory Y.

2. X, Y, Z są trzema przestrzeniami unormowanymi oraz $T_1 : X \to Y$ i $T_2 : Y \to Z$ są operatorami liniowymi ograniczonymi. Pokazać, że złożenie T_2T_1 jest operatorem ograniczonym z X do Z oraz $\|T_2T_1\| \leqslant \|T_1\|\|T_2\|$. Pokazać, że jeśli $T : X \to X$ jest operatorem liniowym ograniczonym, to dowolna potęga T^n (w sensie złożenia) jest operatorem ograniczonym oraz $\|T^n\| \leqslant \|T\|^n$.

3. Pokazać, że jeśli $T \neq 0$ jest operatorem liniowym ograniczonym z X do Y oraz $\|x\| < 1$ dla pewnego $x \in X$, to $\|Tx\| < \|T\|$.

4. Pokazać, że operator $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ określony wzorem

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, \tfrac{1}{2}x_2, \ldots, \tfrac{1}{n}x_n, \ldots)$$

jest liniowy i ograniczony.

5. Pokazać, że obraz $\operatorname{Im} T$ operatora liniowego ograniczonego $T : X \to Y$ nie musi być domkniętą podprzestrzenią w Y. `Wskazówka:` Poprzednie zadanie.

6. Pokazać, że jądro ograniczonego operatora liniowego $T : X \to Y$, tzn. $\ker T = \{x \in X \mid Tx = 0\}$ jest domkniętą podprzestrzenią w X.

7. Pokazać, że odwzorowanie odwrotne $T^{-1} : \operatorname{Im} T \to X$ operatora $T : X \to Y$ nie musi być ograniczone. `Wskazówka:` Zadanie 4.

8. Znaleźć obraz operatora $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y)\, dy.$$

Znaleźć operator odwrotny $T^{-1} : \operatorname{Im} T \to C[0, 1]$. Czy T jest liniowy i ograniczony ?

9. Na $C[0, 1]$ określamy operatory S i T wzorami

$$(Tf)(x) = x\int_0^1 f(t)\, dt \qquad (Sf)(x) = xf(x).$$

Czy operatory T i S są przemienne, tzn. czy $TS = ST$? Obliczyć normy operatorów S, T, ST, i TS.

10. Niech X będzie przestrzenią liniową wszystkich ograniczonych funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na $\mathbb{R}$ z normą

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Dla ustalonej liczby δ określmy odwzorowanie $(Tf)(x) = f(x - \delta)$. Pokazać, że T jest ograniczonym operatorem liniowym X w siebie.