# 5. Zadania z analizy funkcjonalnej

Zadania 2-15 dotyczą przestrzeni z iloczynem skalarnym

**1.** Pokazać, że normy w przestrzeniach $\ell^p$ oraz $L^p(0,1)$ nie pochodzą od iloczynu skalarnego dla $p \neq 2$. `Wskazówka:` Wskazać dwa elementy, dla których nie zachodzi równość równoległoboku.

**2.** Pokazać, że jeśli $\langle x, y\rangle = 0$, to $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Czy odwrotna implikacja jest prawdziwa ? Podać przykład.

**3.** W przestrzeni z iloczynem skalarnym warunek $\|x\| = \|y\|$ implikuje $\langle x+y, x-y\rangle = 0$. Co to oznacza geometrycznie ?

**4.** Sprawdzić tożsamość Apoloniusza w przestrzeni z iloczynem skalarnym.

$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \tfrac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z - \tfrac{1}{2}(x+y)\|^2.$$

Pokazać, że można ją uzyskać z równości równoległoboku.

**5.** Pokazać, że jeśli $x, y \neq 0$ oraz $\langle x, y\rangle = 0$, to wektory $x$ i $y$ są liniowo niezależne. Rozszerzyć tę własność na większą liczbę wektorów.

**6.** Udowodnić, że jeśli $x_n \xrightarrow{n} x$ oraz $y_n \xrightarrow{n} y$, to $\langle x_n, y_n\rangle \xrightarrow{n} \langle x, y\rangle$.

**7.** Pokazać, że $\langle x, y\rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\|x + \alpha y\| \geqslant \|x\|$ dla wszystkich skalarów $\alpha$.

**8.** Podzbiór $A$ przestrzeni liniowej nazywamy wypukłym, jeśli z tego, że $x, y \in A$ wynika, że $\frac{1}{2}(x+y) \in A$. Pokazać, że jeśli $A$ jest niepustym, wypukłym i domkniętym podzbiorem przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, to dla każdego wektora $x \in \mathcal{H}$ istnieje jedyny wektor $z \in A$ spełniający

$$\|x - z\| = \inf\{\|x - y\| \,:\, y \in A\}.$$

`Wskazówka:` Przeanalizować dowód z wykładu dotyczący przypadku, gdy $A$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową.

**9.** Pokazać, że w niepustym i domkniętym zbiorze wypukłym $A$ istnieje element $z$ taki, że

$$\|z\| = \inf\{\|y\| \,:\, y \in A\}.$$

**10.** Pokazać, że domknięcie zbioru wypukłego jest zbiorem wypukłym.

**11.** Pokazać, że zbiór $M = \{x = (x_i) \,:\, \sum x_i = 1\}$ w przestrzeni $\mathbb{C}^n$ jest wypukły i domknięty. Znaleźć w $M$ element o najmniejszej normie euklidesowej.

**12.** Dla zbioru $M$ w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ przez $M^\perp$ oznaczamy zbiór wektorów $x$ takich, że $\langle x, v\rangle = 0$ dla wszystkich $v \in M$. Pokazać, że $M^\perp$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową.

**13.** Pokazać, że jeśli $A \subset B$, to

$$A \subset A^{\perp\perp} \qquad B^\perp \subset A^\perp \qquad A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$$

**14.** Pokazać, że dla podzbioru $A$ w przestrzeni Hilberta, $A^{\perp\perp}$ jest najmniejszą domkniętą podprzestrzenią zawierającą $A$.

**15.** Niech $A$ oznacza podzbiór przestrzeni $\ell^2$ złożony ciągów absolutnie sumowalnych o sumie współrzędnych równej 0. Pokazać, że $A$ jest podprzestrzenią liniową w $\ell^2$. Znaleźć domknięcie zbioru $A$ w przestrzeni $\ell^2$.