6. Zadania z analizy funkcjonalnej

1. Pokazać, że jeśli M jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta, to $M^{\perp\perp} = M$.

2. Podzbiór A unormowanej przestrzeni liniowej nazywamy liniowo gęstym jeśli przestrzeń lin$A$ jest gęsta. Pokazać, że podzbiór A przestrzeni Hilberta jest liniowo gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy $A^{\perp} = \{0\}$.

3. Udowodnić twierdzenie Jordana–von Neumanna dla przypadku rzeczywistego, tzn. pokazać, że norma spełniająca warunek równoległoboku na rzeczywistej przestrzeni liniowej pochodzi od rzeczywistego iloczynu skalarnego. `Wskazówka:` Zdefiniować funkcję

$$R(x, y) = \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Następnie pokazać, że ta funkcja określa iloczyn skalarny według poniższego schematu.

(a) Pokazać, że $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ oraz $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$.

(b) Korzystając z równości równoległoboku wykazać, że

$$\langle x_1 + x_2, 2y\rangle = 2\langle x_1, y\rangle + 2\langle x_2, y\rangle.$$

(c) Na podstawie (b) udowodnić, że $\langle x, 2y\rangle = 2\langle x, y\rangle = \langle 2x, y\rangle$, a następnie

$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle.$$

(d) Udowodnić przez indukcję, że

$$\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle, \qquad n \in \mathbb{N}$$

a następnie

$$\langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle, \qquad r \in \mathbb{Q}.$$

(e) Zauważyć, że jeśli $x_n \xrightarrow{n} x$, to $\langle x_n, y\rangle \xrightarrow{n} \langle x, y\rangle$. Pokazać, że zatem

$$\langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

4. Udowodnić twierdzenie Jordana–von Neumanna dla przypadku zespolonego. `Wskazówka:` Określmy $R(x, y)$ jak w zadaniu 1. Następnie niech

$$\langle x, y\rangle = R(x, y) - iR(ix, y).$$

(a) Pokazać, że $R(ix, y) = -R(x, iy)$ a następnie $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$.

(b) Pokazać, że $\langle ix, y\rangle = i\langle x, y\rangle$ a następnie na podstawie zadania 1 $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ dla $\lambda \in \mathbb{C}$.

5. Dla rzeczywistej przestrzeni liniowej unormowanej X określamy przestrzeń $V = X + iX$ z normą $\|x+iy\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$, dla $x, y \in X$. Pokazać, że V jest rzeczywistą przestrzenią unormowaną. Pokazać, że jeśli norma w X spełnia warunek równoległoboku, to również norma w V spełnia ten warunek. Pokazać, że V jest zespoloną przestrzenią unormowaną z mnożeniem

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y), \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ x, y \in X$$

wtedy i tylko wtedy, gdy norma w X spełnia warunek równoległoboku.

6. Macierzą Grama układu wektorów $\{x_i\}_{i=1}^n$ w przestrzeni z iloczynem skalarnym nazywamy macierz $((x_j, x_i))_{i,j=1}^n$. Pokazać, że wyznacznik macierzy Grama nie znika wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\{x_i\}_{i=1}^n$ są liniowo niezależne. `Wskazówka:` Jeśli wektory są liniowo zależne, to wiersze macierzy są liniowo zależne. To dowodzi implikacji w jedną stronę. Dla dowodu w drugą stronę zastosować indukcję względem n. Zauważyć, że wyznacznik Grama można zapisać jako iloczyn skalarny wektora v_n z wektorem x_n, gdzie

$$v_n = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (x_n, x_1) \\ (x_1, x_2) & (x_2, x_2) & \dots & (x_n, x_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (x_1, x_{n-1}) & (x_2, x_{n-1}) & \dots & (x_n, x_{n-1}) \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

Pokazać, że v_n jest ortogonalny do wektorów $x_1, \dots, x_{n-1}$. Niech Δ_k oznacza wyznacznik Grama pierwszych k wektorów układu. Pokazać, że $(v_n, v_n) = \Delta_{n-1}\Delta_n$. Jeśli wyznacznik Grama znika, to $v_n = 0$. To oznacza, że wektor x_n jest liniową kombinacją pozostałych wektorów, bo z założenia indukcyjnego współczynnik przy x_n jest niezerowy (współczynnik ten jest równy Δ_{n-1}). Pokazać, że wyznacznik Grama jest zawsze nieujemny.

7. Niech $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Pokazać, że wektory

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} v_n$$

stanowią układ ortonormalny o własnościach:

(a) $y_n \perp \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$;

(b) $(y_n, y_n) = 1$;

(c) $(y_n, x_n) > 0$;

(d) $\mathrm{lin}\{y_1, \dots, y_n\} = \mathrm{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Pokazać, że warunki (a)–(d) wyznaczają układ $\{y_n\}$. Przejście od układu $\{x_n\}$ do układu $\{y_n\}$ nosi nazwę procesu ortogonalizacji Grama–Schmidta.

8. Niech $\mathcal{H} = L^2(-1, 1)$ oraz $x_n(t) = t^{n-1}$, dla $n = 1, 2, \dots$. Pokazać, że układ x_n jest liniowo niezależny. Znaleźć y_1, y_2 oraz y_3.

9. Niech

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Pokazać, że H_n jest wielomianem stopnia n. Udowodnić, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 0, \quad n \neq m,$$

tzn. H_n tworzą układ ortogonalny w $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$. H_n nazywamy wielomianami Hermite'a.

10. Znaleźć rzuty ortogonalne wektorów na podane podprzestrzenie:

(a) $f(x) = x^3$, $\quad M = \mathrm{lin}\{1, x\}$, $\quad \mathcal{H} = L^2(0, 1)$.

(b) $f(x) = x$, $\quad M = \mathrm{lin}\{1, \cos x, \sin x\}$, $\quad \mathcal{H} = L^2(-\pi, \pi)$.

11. Obliczyć normy funkcjonałów na przestrzeni $\mathcal{H}$.

(a) $\varphi(f) = \int_0^1 x f(x)\, dx, \qquad \mathcal{H} = L^2(0,1).$

(b) $\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-x^2}\, dx, \quad \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx).$

(c) $\varphi(\{x_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{n+1}, \qquad \mathcal{H} = \ell^2.$

12. Czy funkcjonał $f \mapsto f(0)$ rozszerza się z $C[-1,1]$ do ograniczonego funkcjonału liniowego na przestrzeni Hilberta $L^2(-1,1)$?