## 7. Zadania z analizy funkcjonalnej

**1.** Pokazać, że iloczyn skalarny na przestrzeni z iloczynem skalarnym jest ograniczoną formą półtoraliniową.

**2.** Formą hermitowską nazywamy formę półtoraliniową spełniającą $B(y,x) = \overline{B(x,y)}$. Pokazać, że ograniczona forma hermitowska jest postaci

$$B(x,y) = \langle x, Ay\rangle$$

dla ograniczonego operatora liniowego spełniającego $A^* = A$.

**3.** Formę półtoraliniową nazywamy nieujemną jeśli $B(x,x) \geqslant 0$ dla wszystkich wektorów $x \in \mathcal{H}$. Pokazać, że forma nieujemna jest hermitowska oraz spełnia nierówność Schwarza

$$|B(x,y)|^2 \leqslant B(x,x)B(y,y).$$

**4.** Dla nieujemnej formy półtoraliniowej $B(x,y)$ określmy $p(x) = \sqrt{B(x,x)}$. Pokazać, że $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ oraz $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

**5.** Pokazać, że $\|A^*\| = \|A\|$ dla każdego operatora $A \in B(\mathcal{H})$.

**6.** Dla zespolonej funkcji $k(x,y)$ ciągłej określamy operator

$$Af(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy$$

dla $f \in L^2(0,1)$. Sprawdzić, że $A$ jest ograniczony. Znaleźć operator $A^*$.

**7.** Znaleźć operator sprzężony do operatora

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y)\, dy$$

określonego na $\mathcal{H} = L^2(0,1)$.

**8.** Pokazać, że odwzorowanie $A \mapsto A^*$ na przestrzeni $B(\mathcal{H}) := B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ jest antyliniowe.

**9.** Pokazać, że dla $A$, $B \in B(\mathcal{H})$ mamy $(AB)^* = B^* A^*$.

**10.** Niech $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ będzie ograniczonym operatorem odwracalnym. Pokazać, że $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

**11.** Niech $A$ będzie ograniczonym operatorem na $\mathcal{H}$ spełniającym $A(M_1) \subset M_2$, dla podprzestrzeni $M_1$, $M_2 \subset \mathcal{H}$. Pokazać, że $A^*(M_2^\perp) \subset M_1^\perp$.

**12.** Pokazać, że dla operatora $A \in B(\mathcal{H})$ zachodzi

$$\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp \qquad \operatorname{Im} A \subset (\ker A^*)^\perp.$$

**13.** Pokazać, że jeśli dwa operatory liniowe $T_1$, $T_2$ spełniają $\langle T_1 x, x\rangle = \langle T_2 x, x\rangle$ dla każdego $x \in \mathcal{H}$, to $T_1 = T_2$.

**14.** Dla ograniczonego operatora liniowego $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ określamy operator $S = I + T^*T$, gdzie $I$ oznacza operator identycznościowy. Pokazać, że $S$ spełnia

$$\|x\| \leqslant \|Sx\| \leqslant (1 + \|T\|^2)\|x\|.$$

Następnie pokazać, że $S$ jest różnowartościowy i że podprzestrzeń $\operatorname{Im} S$ jest domknięta. Korzystając z zadania 12 udowodnić, że $\operatorname{Im} S$ jest gęsta w $\mathcal{H}$. Pokazać, że $S$ jest odwracalny oraz $\|S^{-1}\| \leqslant 1$.

**15.** Załóżmy, że ograniczony operator liniowy $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ma skończenie wymiarowy obraz. Pokazać, że $T$ ma postać

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle w_j$$

dla pewnych wektorów $v_j, w_j \in \mathcal{H}$.

**16.** Załóżmy, że ograniczony operator liniowy $T : X \to Y$, gdzie $X$ i $Y$ są przestrzeniami unormowanymi, ma skończenie wymiarowy obraz. Pokazać, że $T$ ma postać

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) w_j,$$

dla pewnych elementów $w_j \in Y$ oraz ograniczonych funkcjonałów liniowych $\varphi_j$ określonych na $X$.

**17.** Niech $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie bazą ortonormalną w przestrzeni $\mathcal{H}$. Określmy operator prawego przesunięcia $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ przez $Te_n = e_{n+1}$, dla $n = 1, 2, \cdots$. Znaleźć obraz, jądro i normę operatora $T$ i $T^*$. Obliczyć $T^*T$ oraz $TT^*$.

**18.** Znaleźć normę operatora $T$ określonego na $\ell^2(\mathbb{N})$ przez

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n, \ldots),$$

dla ustalonego ograniczonego ciągu liczb zespolonych.