8. Zadania z analizy funkcjonalnej

1. Pokazać, że funkcjonał liniowy φ na przestrzeni unormowanej jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jego jądro $\ker\varphi = \{x : \varphi(x) = 0\}$ jest domkniętą podprzestrzenią. * Pokazać, że jeśli φ jest nieciągły, to jego jądro jest gęstą wypukła podprzestrzenią. Pokazać, że wtedy całą przestrzeń można zapisać w postaci sumy mnogościowej dwu rozłącznych, gęstych i wypukłych podzbiorów.

$*$**2.** Pokazać, że na przestrzeniach $C[0,1]$ oraz ℓ^2 istnieją nieciągłe funkcjonały liniowe. `Wskazówka:` Określić funkcjonały na podprzestrzeniach $C^1[0,1]$ i ℓ^1 a następnie rozszerzyć do całej podprzestrzeni używając np. lematu Kuratowskiego-Zorna.

3. Pokazać, że dla każdego niezerowego funkcjonału liniowego φ na przestrzeni liniowej X istnieje wektor x_0 taki, że $X = \mathbb{C}x_0 \oplus \ker\varphi$. To oznacza, że $\ker\varphi$ jest podprzestrzenią liniową kowymiaru 1.

4. Półnormą $p(x)$ na przestrzeni X nazywamy funkcjonał $p : X \to \mathbb{R}$ spełniający $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$, oraz $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, dla $\alpha \geqslant 0$. Pokazać, że $p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y)$ dla $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Wykazać, że $p(0) = 0$, oraz $p(-x) \geqslant -p(x)$.

5. Pokazać, że jeśli półnorma $p(x)$ jest ciągła w $x = 0$ to jest ciągła w każdym punkcie.

6. Niech $p(x)$ będzie półnormą na rzeczywistej przestrzeni liniowej X. Pokazać, że istnieje funkcjonał liniowy φ na X spełniający $-p(-x) \leqslant \varphi(x) \leqslant p(x)$.

7. Niech X będzie niezerową przestrzenią unormowaną. Pokazać, że istnieje niezerowy funkcjonał ograniczony φ na X.

8. Dwa elementy x i y przestrzeni unormowanej X spełniają $\varphi(x) = \varphi(y)$, dla każdego $\varphi \in X^*$. Pokazać, że $x = y$.

9. Niech φ będzie niezerowym rzeczywistym funkcjonałem liniowym na X. Pokazać, że obraz przez φ otwartego wypukłego podzbioru w X jest otwartym przedziałem. Pokazać, że gdy φ jest niezerowym zespolonym funkcjonałem liniowym na X, to obraz przez φ otwartego wypukłego podzbioru w X jest otwartym i wypukłym podzbiorem w $\mathbb{C}$.

10. $\{x_n\}$ jest ciągiem elementów w przestrzeni unormowanej X. Pokazać, że x jest granicą kombinacji liniowych $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(x) = 0$ dla dowolnego funkcjonału $\varphi \in X^*$ takiego, że $\varphi(x_j) = 0$ dla $1 \leqslant j < \infty$. `Wskazówka:` Rozważyć najmniejszą domkniętą podprzestrzeń zawierającą wyrazy ciągu $\{x_n\}$.

11. Niech Y będzie podprzestrzenią przestrzeni unormowanej X i $x \in X$. Pokazać, że

$$\mathrm{dist}(x, Y) = \sup\{|\varphi(x)| : \|\varphi\| = 1,\ \varphi(y) = 0 \text{ dla } y \in Y\}.$$

12. Pokazać, że jeśli $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jest układem liniowo niezależnym w przestrzeni unormowanej X, to istnieje ograniczony operator liniowy $T : X \to \mathbb{C}^n$ taki, że $T(v_j) = e_j$, gdzie $\{e_j\}_{j=1}^n$ oznacza bazę w $\mathbb{C}^n$. `Wskazówka:` Szukać T w postaci $T(v) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(v)e_j$, gdzie φ_j jest ciągłym funkcjonałem na X.

13. Pokazać, że dla każdej funkcji $w(x)$ o wahaniu ograniczonym na $[a,b]$ istnieje funkcja o wahaniu ograniczonym $\widetilde{w}(x)$ lewostronnie ciągła w (a,b) oraz $w(x) = \widetilde{w}(x)$ dla każdego punktu ciągłości funkcji w. Pokazać, że wtedy

$$\int_a^b f(x)dw(x) = \int_a^b f(x)d\widetilde{w}(x), \qquad f \in C[a,b].$$

14. Pokazać, że jeśli w_1 i w_2 są funkcjami o wahaniu ograniczonym, ciągłymi lewostronnie w (a, b), $w_1(a) = w_2(a)$ oraz

$$\int_a^b f(x)dw_1(x) = \int_a^b f(x)dw_2(x), \qquad f \in C[a,b],$$

to $w_1(x) = w_2(x)$ dla $a \leqslant x \leqslant b$.

15. M jest rodziną wszystkich funkcji z $C[0,1]$, dla których

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx - \int_{1/2}^1 f(x)\,dx = 1.$$

Pokazać, że M jest zbiorem wypukłym, domkniętym nie mającym elementu o najmniejszej normie $\|\cdot\|_\infty$.

16. ℓ^∞ jest przestrzenią wszystkich ciągów ograniczonych o wyrazach rzeczywistych. Pokazać, że istnieje funkcjonał liniowy φ określony na ℓ^∞ o własnościach:

(i) $\inf \zeta_n \leqslant \varphi(\{\zeta_n\}) \leqslant \sup \zeta_n$.

(ii) $\varphi(\{\zeta_{n+1}\}) = \varphi(\{\zeta_n\})$.

Pokazać, że

(iii) $\liminf \zeta_n \leqslant \varphi(\{\zeta_n\}) \leqslant \limsup \zeta_n$,

gdzie $\liminf \zeta_n = \sup_n \inf_{m \geqslant n} \zeta_m$ oraz $\limsup \zeta_n = \inf_n \sup_{m \geqslant n} \zeta_m$.

Funkcjonał φ nazywa się granicą Banacha i jest często oznaczany przez LIM. `Wskazówka:` Rozważyć podprzestrzeń Y w ℓ^∞ złożoną z ciągów x_n dla których istnieje granica

$$\lim_n \tfrac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$